2014•2015
FACULTEIT BEDRIJFSECONOMISCHE WETENSCHAPPEN
master in de toegepaste economische wetenschappen: handelsingenieur

Masterproef

Voorraadbeslissingen in een omgeving van onvolledige kennis van de vraag gedurende de levertijd

Promotor :
Prof. dr. Gerrit JANSSENS

Arne Pallen
Scriptie ingediend tot het behalen van de graad van master in de toegepaste economische wetenschappen: handelsingenieur

Universiteit Hasselt | Campus Hasselt | Martelarenlaan 42 | BE-3500 Hasselt
Universiteit Hasselt | Campus Diepenbeek | Agoralaan Gebouw D | BE-3590 Diepenbeek

2014•2015

FACULTEIT BEDRIJFSECONOMISCHE WETENSCHAPPEN

master in de toegepaste economische wetenschappen: handelsingenieur

Masterproef

Voorraadbeslissingen in een omgeving van onvolledige kennis van de vraag gedurende de levertijd

Promotor :
Prof. dr. Gerrit JANSSENS

Arne Pallen

Scriptie ingediend tot het behalen van de graad van master in de toegepaste economische wetenschappen: handelsingenieur

universiteit hasselt
KNOWLEDGE IN ACTION

Woord vooraf

Deze masterproef vormt het sluitstuk van mijn opleiding Handelsingenieur: Operationeel management en logistiek aan de universiteit Hasselt. Tijdens deze opleiding heb ik zowel op persoonlijk vlak als op vlak van kennis zeer veel bijgeleerd. Ik kijk ernaar om alles wat ik tijdens mijn opleiding geleerd heb te gebruiken voor de uitbouw van mijn professionele carrière.

Bij de keuze van mijn masterproefonderwerp heb ik mij laten leiden door twee zaken, enerzijds de aansluiting van het onderwerp met mijn opleiding zodat ik de theorie, die ik gedurende de afgelopen jaren geleerd heb, kan toepassen in de praktijk en anderzijds de interesse in operationele topics en specifiek een domein wat me bijzonder interesseert namelijk voorraadbeheer.

Deze masterproef is niet enkel het resultaat van het werk van mezelf alleen maar ook van andere personen. Daarom zou ik graag via deze weg enkele mensen willen bedanken. In de eerste plaats wil ik mijn promotor, Prof. dr. Gerrit Janssens, bedanken voor de volledige begeleiding van deze masterproef alsook de snelle opvolging en duidelijke feedback die ik van hem gedurende mijn masterproef gekregen heb. Daarnaast wil ik mijn ouders bedanken die mij de kans gegeven hebben deze studie aan te vatten alsook de onvoorwaardelijke steun die ik van hun gehad heb tijdens de moeilijkere periodes van mijn opleiding. Tot slot wil ik ook mijn vrienden bedanken die ertoe bijgedragen hebben mijn studententijd tot één van de leukste periodes uit mijn leven te maken. Zonder al deze personen zou ik niet geraakt zijn waar ik nu sta en daarvoor wil ik hun oprecht bedanken.

Samenvatting

In de huidige toestand van wereldwijde concurrentie kan het kleinste detail ervoor zorgen of een bedrijf winst of verlies maakt. Voorraadbeheer vormt hierin een zeer belangrijke schakel. De producten moeten immers op het juiste moment en in de juiste hoeveelheid aanwezig zijn zodat de beste service aan de klant aangeboden kan worden. Dit brengt grote investeringskosten met zich mee. De keuze van het bestelpunt is hierbij cruciaal. Vanaf het moment dat het voorraadniveau het bestelpunt overschrijdt, wordt een bestelling voor nieuwe producten bij de leverancier geplaatst. De keuze van het bestelpunt resulteert uit de combinatie van de verwachte vraag tijdens de bestelperiode en de grootte van de veiligheidsvoorraad. Een veiligheidsvoorraad heeft als doel dat er zich geen stokbreuk voordoet vanaf het moment dat de vraag hoger is als gedacht. De veiligheidsvoorraad fungeert als buffer tegen onvoorziene situaties. De kosten die hiermee gepaard gaan mogen echter niet te hoog oplopen. Het bedrijf moet in staat zijn een juiste balans te vinden tussen de kosten die gepaard gaan met het houden van meer voorraad en de kosten die gepaard gaan met een eventuele stokbreuk. Dit vraagstuk wordt bemoeilijkt in het geval van onvolledige informatie over de vraag. Het bedrijf moet kunnen anticiperen op het feit dat ze niet over de volledige informatie beschikt, maar ze slechts bepaalde karakteristieken van de verdeling van de vraag kennen. Deze situatie kan voorvallen bij producten waarvoor geen historische data beschikbaar zijn. Voorbeelden hiervan zijn producten die pas op de markt gebracht zijn of producten met een zeer langzame hernieuwingstijd (slow-movers). In hoofdstuk één wordt dit probleem verder uitgelegd en geïntroduceerd aan de hand van de onderzoeksvragen. Ook de methodologie wordt in dit hoofdstuk toegelicht.

Na het inleidend hoofdstuk wordt in hoofdstuk twee gekeken op welke verschillende manieren het voorraadniveau bepaald kan worden. Dit wordt gedaan onder de veronderstelling dat de volledige informatie over de vraag gekend is. Het houden van voorraad brengt natuurlijk kosten met zich mee. Deze kosten worden onderverdeeld in drie grote groepen. Een eerste groep zijn de kosten voor het houden van producten in voorraad of de voorraadkosten. Een tweede groep zijn de bestelkosten en de laatste groep zijn de tekortkosten. Dit zijn kosten die zich voordoen indien een stockbreuk plaatsvindt waardoor de producten niet op tijd aan de klant geleverd kunnen worden. Na het overlopen van de verschillende soorten kosten, wordt een overzicht gegeven van de verschillende manieren waarmee het optimaal bestelpunt bepaald kan worden. De bepaling van het optimaal bestelpunt gebeurt aan de hand van optimalisatiemodellen die gebaseerd zijn op een bepaalde prestatiemaatstaf. Twee categorieën van prestatiemaatstaven kunnen gebruikt worden.

De eerste categorie is kost-georiënteerd. Hierbij wordt het voorraadniveau bepaald zodat de totale kosten geminimaliseerd worden. De tweede categorie is service-georiënteerd. In deze situatie wordt het voorraadniveau bepaald aan de hand van de minimalisatie van de voorraad- en bestelkosten terwijl tegelijkertijd moet voldaan zijn aan een bepaald serviceniveau. De tekortkosten worden hier niet opgenomen in de minimalisatie van de verschillende kosten maar zijn geïncorporeerd in de bepaling van het serviceniveau. Dit is handig aangezien de waarde voor de tekortkosten in realiteit moeilijk te schatten zijn aangezien ze bestaan uit moeilijk

kwantificeerbare zaken zoals bvb. het verlies van goodwill bij de klant doordat de producten niet op tijd geleverd werden.

In hoofdstuk drie wordt dieper ingegaan op de verschillende service-maatstaven die gebruikt kunnen worden om het optimaal bestelpunt te bepalen. In deze masterproef komen vier service-maatstaven aan bod. Deze zijn achtereenvolgens: de fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in een bestelperiode, de kans op een geen tekort in een bestelperiode, de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode en als laatste de kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval $[t_1, t_2]$ voorvalt in een bestelperiode.

In hoofdstuk vier wordt de situatie besproken voor de bepaling van de optimale veiligheidsvoorraad en bestelpunt indien niet de volledige informatie over de vraag gekend is. Door het feit dat niet alle karakteristieken van de vraag gekend zijn, is het niet mogelijk één optimale waarde voor de veiligheidsvoorraad te bekomen. In plaats daarvan wordt een interval van waardes bekomen. Hierbij vormt, vanuit het perspectief van een bedrijf, de bovengrens de belangrijkste waarde omdat het namelijk correspondeert met het meest pessimistische scenario waarbij het verwacht tekort het vooropgestelde serviceniveau van het bedrijf niet overschrijdt. In dit hoofdstuk komen twee manieren aan bod voor de bepaling van het bestelpunt onder onvolledige informatie.

De eerste manier is analytisch. Hier wordt door middel van wiskunde afleidingen een formule bekomen om het optimaal bestelpunt te bepalen. Nadeel van deze methode is dat dit niet altijd kan worden toegepast. Hiertoe wordt een alternatieve aanpak geïntroduceerd namelijk, lineaire programmering. Deze manier bepaalt het optimale bestelpunt rekening houdend met een aantal beperkingen waaraan voldaan moet zijn. Vervolgens wordt een lineair model uitgewerkt voor elk van de vier service-maatstaven. De lineaire modellen zijn in staat het optimale bestelpunt te bepalen gegeven een bepaald vooropgesteld serviceniveau.

In hoofdstuk vijf wordt enkele gevallen verder onderzocht. Dit wordt gedaan aan de hand van de lineaire programma's uitgewerkt in het vorige hoofdstuk. Zo worden er situaties onderzocht die niet of zeer moeilijk analytisch berekend kunnen worden. In totaal worden drie verschillende gevallen onderzocht. Het eerste geval onderzoekt of het voordelig kan zijn om het voorraadsniveau te bepalen met behulp van meerdere service-maatstaven tegelijkertijd. In de meeste gevallen nu, wordt enkel één bepaalde service-maatstaf gekozen om het bestelpunt te bepalen. Het onderzoek toont aan dat de bepaling van het bestelpunt aan de hand van meerdere service-maatstaven geen toegevoegde waarde heeft. Het tweede geval onderzoekt het effect op de veiligheidsvoorraad indien geweten is dat de verdeling unimodaal is en de unieke modus van de verdeling gekend is. Deze resultaten worden vergeleken met die waarbij de modus van de verdeling niet gekend is. Ook worden verder enkele sensitiviteitsanalyses uitgevoerd om de evolutie van de veiligheidsvoorraad en het bestelpunt voor de unimodale verdeling te onderzoeken. Uit de resultaten wordt geconcludeerd dat bij de bepaling van het bestelpunt, het belangrijker is te weten of de verdeling al dan niet unimodaal verdeeld is, dan daadwerkelijk de unieke modus van de verdeling te kennen. Ook wordt vastgesteld dat de kennis van een unimodale verdeling leidt tot een meer conservatieve bepaling van het bestelpunt. Het derde geval focust op service-maatstaf drie, de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode. Hierbij zijn, bij de bepaling van het optimaal bestelpunt, twee beslissingsvariabelen waarmee rekening gehouden moet worden. De evolutie van het bestelpunt alsook het effect op het bestelpunt wordt hierbij onderzocht indien één van de twee beslissingsvariabelen vooraf vastgelegd wordt en de andere variabel bewegen kan.

Lijst van Tabellen

Lijst van figuren

Inhoudsopgave

1. Inleiding

1.1. Probleemstelling

Een belangrijk doel van voorraadbeheer bestaat eruit dat producten aanwezig zijn op het juiste moment en met de juiste hoeveelheid om bestellingen tegemoet te komen. Dit vraagstuk wordt echter bemoeilijkt door de onzekerheid van een voorraadsysteem. Zo kan deze onzekerheid te wijten zijn aan enerzijds de leverancier of anderzijds de klant.

De onzekerheid in een voorraadsysteem afkomstig van de leverancier heeft te maken met onder andere de levertijd, de kwaliteit en de opbrengst van een product. Maar de onzekerheid afkomstig van de klant is veel belangrijker om rekening mee te houden. De onzekerheid afkomstig van de klant heeft voornamelijk te maken met de vraag naar een product. Zo kan een tekort aan voorraad leiden tot een stockbreuk waardoor tekortkosten kunnen optreden en/of kan een tekort leiden tot een achteruitgang van de geboden service aan de klant. De kosten die hiermee gepaard gaan zijn vaak groot in vergelijking met de voorraadkosten om extra producten in voorraad te houden, wat resulteert dat bedrijven meestal een hoger niveau van voorraad aanhouden.

De beslissingen omtrent het voorraadbeheer worden genomen aan de hand van een bepaalde prestatiemaatstaf die kost- of service-georiënteerd kan zijn. De focus in deze masterproef ligt op de bepaling van het optimale bestelpunt. Het bestelpunt is het punt waarbij het bedrijf een nieuwe bestelling bij de leverancier plaatst van zo gauw het voorraadniveau dit punt overschrijdt. Bij kost-georiënteerde maatstaven wordt het bestelpunt zo bepaald zodat de totale kosten geminimaliseerd worden. De totale kost is opgebouwd uit verschillende soorten kosten. Eén soort kost hiervan is de tekortkost. Dit zijn de kosten die gepaard gaan met een stockbreuk. De tekortkost bestaat onder andere uit de kost die resulteert uit een vermindering van de goodwill bij de klant omdat het bedrijf niet in staat was de producten op tijd aan de klant te bezorgen. Een ander deel van de tekortkost is een strafkost voor elk product dat niet op tijd geleverd kon worden aangezien het resulteerde in ofwel enerzijds een verloren opbrengst voor het bedrijf of anderzijds een backorder waardoor het product in een latere periode alsnog aan de klant geleverd wordt. Bij een service-georiënteerd model wordt de prestatiemaatstaf uitgedrukt als zijnde een bepaald serviceniveau waaraan voldaan moet worden. Het bestelpunt wordt zo bepaald zodat aan het serviceniveau voldaan wordt. Een voorbeeld van een service-maatstaf is “de kans dat geen tekort zich voordoet tijdens een bestelperiode”. Verder kunnen nog andere service-maatstaven gebruikt worden voor het definiëren van het serviceniveau. Deze maatstaven zullen later in de masterproef aan bod komen.

Kort samengevat is het voor een bedrijf belangrijk dat ze bij hun voorraadbeslissingen een goede balans vinden tussen de kosten die gepaard gaan met het houden van extra voorraad en de kosten die gepaard gaan met een eventuele stokbreuk. Deze keuze wordt echter bemoeilijkt in het geval dat niet de volledige informatie over de verdeling van de vraag gekend is. Dit leidt ertoe dat bedrijven in staat moeten zijn om een optimale voorraadbeslissing te nemen ondanks het feit dat niet alle informatie over de vraag gekend is. In deze masterproef wordt dieper ingegaan op welke manier een optimale voorraadbeslissing genomen kan worden in het geval van gedeeltelijke informatie.

1.2. Onderzoeksopzet en methodologie

Deze masterproef is opgesplitst in drie delen: het eerste deel handelt over de situatie voor het nemen van een voorraadbeslissing in het geval dat alle informatie over de verdeling van de vraag tijdens de leverperiode gekend is. Het tweede deel van de masterproef betreft de situatie voor het nemen van een voorraadbeslissing in het geval dat niet alle informatie over de verdeling van de vraag tijdens de levertijd gekend is. En het derde deel is het onderzoeksgedeelte van de masterproef waarbij, onder verschillende omstandigheden, het effect op de voorraadbeslissing onderzocht wordt. Voor deze masterproef wordt geen aparte literatuurstudie gemaakt. Dit heeft te maken met het feit dat de literatuur over dit onderwerp gering is om hieraan een apart hoofdstuk te wijden en het bovendien duidelijker voor de lezer is dat de theorie uit de literatuur die relevant is voor een bepaald hoofdstuk in hetzelfde hoofdstuk uitgelegd wordt.

De *centrale onderzoeksvraag* luidt als volgt:

"Hoe een optimale voorraadbeslissing te nemen in een omgeving van onvolledige kennis van de vraag gedurende de levertijd?".

Deze centrale onderzoeksvraag zal trachten beantwoord te worden aan de hand van verschillende deelvragen. De *eerste deelvraag* luidt als volgt: *"Op welke manieren kan worden omgegaan met een tekort?"*

Het is mogelijk bij het houden van een voorraad dat situaties voorvallen waarbij de producten niet op tijd aan de klant geleverd kunnen worden. Hoe wordt hiermee rekening gehouden en op welke verschillende manieren kan dit behandeld worden? Hierbij worden de begrippen "verloren verkoop" en "backorders" uitgelegd en welke invloeden deze verschillende benaderingen hebben op de totale voorraadskosten.

De *tweede deelvraag* is: *"hoe worden de eisen voor een voorraadbeslissing gedefinieerd?"* Een bedrijf legt een voorraad in zodat het op tijd de producten aan de klant kan leveren. Dit is noodzakelijk zodat een goede service aan de klant wordt aangeboden waardoor klanten in de toekomst opnieuw bij het bedrijf zullen bestellen. Het bedrijf bepaald het voorraadniveau aan de hand van bepaalde eisen waaraan de voorraad moet voldoen. Hier wordt nagegaan op welke verschillende manieren deze eisen geformuleerd kunnen worden. Hierbij wordt een onderscheid gemaakt of de optimalisatie gebeurt op basis van kost-georiënteerde of service-georiënteerde prestatiemaatstaven.

De *derde deelvraag* luidt als volgt: *"hoe kan het bestelpunt berekend worden?"* Deze deelvraag handelt over de verschillende methodes voor het bepalen van het optimale bestelpunt. De focus ligt hier op de methodes indien niet de volledige informatie over de vraag gekend is. Deze deelvraag handelt over enerzijds de voor- en nadelen van het op analytische wijze bepalen van het bestelpunt en anderzijds de voor- en nadelen van het bepalen van het bestelpunt met behulp van lineaire programmering.

De volgende deelvragen hebben betrekking op het onderzoeksgedeelte van deze masterproef. De *vierde deelvraag* luidt als volgt: *"Is het voordelig om het bestelpunt te bepalen aan de hand van meerdere service-maatstaven?"* Deze deelvraag behandelt de situatie waarbij meerdere service-maatstaven tegelijkertijd gebruikt worden bij de bepaling van het bestelpunt.

De *vijfde deelvraag* is: *"Wat is de invloed van de kennis van een unimodale verdeling op het bestelpunt?"* Bij deze deelvraag wordt onderzocht welke veranderingen er optreden indien bij bepaling van het bestelpunt geweten is dat de verdeling unimodaal is.

De *zesde deelvraag* luidt als volgt: *"Welke invloed heeft een verandering van één van de beslissingsvariabelen op het bestelpunt?* De zesde deelvraag focust zich op service-maatstaf drie, de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode. Voor deze maatstaf zijn er bij de bepaling van het bestelpunt, twee beslissingsvariabelen waarmee rekening gehouden moet worden. Hierbij wordt de interactie tussen de twee beslissingsvariabelen en het bestelpunt onderzocht.

De *zevende deelvraag* heeft betrekking op service-maatstaf vier, de kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval $[t_1, t_2]$ voorvalt in een bestelperiode en luidt als volgt: *"Hoe kan service-maatstaf vier gebruikt worden bij de optimalisatie van een newsboy probleem?"* Deze deelvraag kadert in het frame van een bepaald "newsboy probleem" waarbij de verkoper één periode de tijd heeft om zijn producten te verkopen waar de producten in de volgende periode niet bruikbaar meer zijn. De optimale bestelhoeveelheid moet hierbij bepaald worden zodat de kans dat de winst hoger of gelijk aan een vooropgesteld bedrag gemaximaliseerd wordt.

2. De bepaling van het bestelpunt in het geval van volledige informatie

2.1. Notities en definities en veronderstellingen

In deze sectie wordt een overzicht gegeven van notaties, definities en verschillende veronderstellingen die in het verdere verloop van de masterproef gebruikt worden.

- Jaarlijkse vraag $\boldsymbol{D}$ (producten/jaar) is een random variabele met een verwachte waarde $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D})$, een variantie $\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{D})$, en een standaard afwijking $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{D})$;
- Vraag $\boldsymbol{d}$ (producten/tijdseenheid);
- Leverperiode (lead-time) $\boldsymbol{L}$;
- Vraag tijdens de levertijd $\boldsymbol{X}$ (producten/levertijd) is een random variabele met een verwachte waarde $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$, een variantie $\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{X})$, en een standaard afwijking $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})$;
- Voorraadkost $\boldsymbol{C_h}$ (€/product/jaar);
- Bestelkost $\boldsymbol{C_p}$ (€/bestelling);
- Tekortkost $\boldsymbol{C_s}$ (€/product);
- Bestelhoeveelheid $\boldsymbol{q}$ (producten/bestelling);
- Bestelpunt $\boldsymbol{s}$;
- Veiligheidsvoorraad $(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}))$ of $\boldsymbol{v}$;
- Veiligheidsfactor $\boldsymbol{k}$;
- Het verwachte voorraadniveau $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{I})$;
- De standaard normaalfunctie $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Z})$;
- De standaard verlies functie $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Z})$ van de normaalverdeling;
- Service-maatstaf $\boldsymbol{S_1}$: De fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in een bestelperiode;
- Service-maatstaf $\boldsymbol{S_2}$: De kans op geen tekort in een bestelperiode;
- Service-maatstaf $\boldsymbol{S_3}$: de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode;
- Service-maatstaf $\boldsymbol{S_4}$: de kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval $[t_1, t_2]$ voorvalt in een bestelperiode;
- Eerste moment van een bestelperiode $\boldsymbol{m_1} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$;
- Tweede moment van een bestelperiode $\boldsymbol{m_2} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^2)$;
- Het aantal punten dat geëvalueerd wordt bij lineaire analyse $\boldsymbol{k}'$;
- Het maximaal verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode $\boldsymbol{m_3}$;
- De maximale verwachte kans op een tekort in een bestelperiode $\boldsymbol{m_4}$;
- Het maximaal verwachte aantal tekort in backorder in een bestelperiode $\boldsymbol{m_5}$;
- De modus van de verdeling $\boldsymbol{m}$;
- De Khinchine transformatie van het eerste moment $\boldsymbol{v_1}$**;**
- De Khinchine transformatie van het tweede moment $\boldsymbol{v_2}$;

Dit hoofdstuk geeft een overzicht van de verschillende methodes die zoal gebruikt worden om het optimaal bestelpunt te bepalen. Deze methodes kunnen opgesplitst worden in twee grote categorieën namelijk, de bepaling van het bestelpunt aan de hand van kost-georiënteerde prestatiemaatstaven of de bepaling van het bestelpunt aan de hand van service-georiënteerde prestatiemaatstaven. Vooraleer deze methodes uitgelegd worden, wordt kort iets gezegd over de verdeling van de vraag tijdens de levertijd (lead-time). Dit is belangrijk aangezien een verkeerde keuze van verdeling kan leiden tot een niet-optimale bepaling van het bestelpunt en bijgevolg hogere kosten. In *sectie 2.3* wordt dieper ingegaan op de methodes die gebruik maken van kost-georiënteerde prestatiemaatstaven voor het bepalen van het bestelpunt. Hierbij wordt de link gelegd naar het service-element dat terugkomt in de verschillende kostenfuncties. Dit is belangrijk aangezien dit element zeer doorslaggevend is voor het nemen van de juiste voorraadbeslissing. In *sectie 2.4* wordt de methode uitgelegd voor het bepalen van het bestelpunt aan de hand van service-georiënteerde prestatiemaatstaven.

2.2. Verdeling van de vraag gedurende de levertijd.

In vele tekstboeken wordt uitgegaan van de veronderstelling dat de vraag voor een product voorkomt uit heel veel kleine vragen van individuele klanten. Hierdoor wordt aangenomen dat de gehele vraag gezien kan worden als een continue variabele die een normaalverdeling volgt. Deze veronderstelling is echter niet altijd correct. Silver en Peterson (1985) concluderen dat in het geval van "fast-moving producten", dit zijn producten met een verwachte vraag tijdens de levertijd hoger dan 10, de normaalverdeling een goede benadering is. Maar Silver en Peterson (1985) benadrukken ook dat de normaalverdeling niet altijd gebruikt kan worden omwille van twee redenen. Als eerste is de normaalverdeling gedefinieerd op zowel de positieve als de negatieve as waardoor de verdeling conceptueel gezien niet mogelijk. Er kan immers, in theorie, een situatie voorvallen waarbij een negatieve vraag gecreëerd wordt. De tweede reden dat de normaalverdeling niet altijd gebruikt kan worden, is dat de normaalverdeling een symmetrisch verloop heeft en dit niet altijd realistisch is. De nodige aandacht moet dus worden besteed aan welke verdeling het meest gepast het verloop van de vraag beschrijven kan. Een foute keuze van verdeling kan leiden tot enerzijds een slechte service omdat teveel stockbreuken zich voordoen of anderzijds te hoge kosten omdat teveel producten in voorraad gehouden worden (Ramaekers en Janssens, 2012).

Een mogelijke andere verdeling ter vervanging van de normaalverdeling is de Gamma verdeling. De Gamma verdeling wordt vaak voorgesteld als een alternatief voor de normaalverdeling. De Gamma verdeling is immers enkel op de positieve as gedefinieerd en kan, afhankelijk van de parameters van de verdeling, veel verschillende vormen aannemen die gaan van een monotonische dalende curve naar een unimodale verdeling of ook een normaalverdeling. Ook is de Gamma verdeling geschikt in het geval van een vaste levertijd. Deze situatie kan redelijk vlot worden uitgebreid naar levertijden met onzekerheid (Burgin, 1975).

In de literatuur komen ook nog andere verdelingen ter sprake. Zo zou, indien de vraag erg laag is, een Poisson verdeling een goede schatter van de vraag zijn (Silver en Peterson, 1985). Vereecke en Verstraeten (1994) vonden echter dat bij het gebruik van een Poisson verdeling, de variantie van de vraag soms wel het dubbele van de gemiddelde vraag kon bedragen waardoor zij een alternatieve oplossing voorstelden namelijk de "Package Poisson". In deze verdeling werd de gemiddelde vraag uitgedrukt in functie van een bepaald aantal pakketten (packages) waarbij de grootte van een pakket afgeleid werd door middel van empirische data over het gemiddelde en de variantie van de vraag. Ramaekers en Janssens (2012) maakten een overzicht van de verschillende verdelingen die allemaal in de literatuur voorgesteld worden voor het beschrijven van de vraag. Dit overzicht is terug te vinden in *figuur 1*.

Figuur 1: De keuze van verdeling bij het beschrijven van de vraag

Soort	Verdeling	Referentie
Fast-moving producten	Normaal	Silver en Peterson (1985)
	Gamma	Burgin (1975)
Slow-moving producten	Laplace of Poisson	Silver en Peterson (1985)
	Aparte verdelingen voor de grootte van de vraag en de dichtheidsfunctie van de vraag	Croston (1972)
	dichtheidsfunctie van de vraag en de Gamma verdeelde vraaggrootte	Dunsmuir en Snyder (1989)
	Compound Bernouilli	Dunsmuir en Snyder (1989)
	Compound Poisson	Adelson (1966)
	Compound Poisson met constante vraaggrootte	Friend (1960)
	Package Poisson	Vereecke en Verstraeten (1994)
	Compound Poisson met geometrische vraaggroote	Hadley en Within(1963)

Bron: Ramaekers en Janssens., 2012

Bartezzaghi et al. (1999) deden onderzoek naar de impact van de verdeling van de vraag op het gekozen voorraadniveau zodat aan een bepaald serviceniveau voldaan werd. Ze vonden dat, bij dezelfde factor van variatie, de verdeling van de vraag een zeer doorslaggevende factor was. Het verschil in voorraadniveau tussen de verschillende verdelingen was zelfs zo groot dat het overeen stemde met het effect van een verdubbeling van de variatiefactor. Dit toont nogmaals aan dat voldoende aandacht geschonken moet worden aan factoren die een invloed kunnen hebben op de vorm van de verdeling. Andere studies vonden dat dit niet het geval was (Naddor, 1978; Fortuin, 1982). Hierbij moet wel worden vermeld dat deze studies veel kleiner waren in vergelijking met Bartezzaghi et al..

Uit de literatuur blijkt dat, voor het bepalen van het juiste voorraadniveau, de verdeling van de vraag een zeer belangrijke factor is. Zo kan een foute keuze immers leiden tot een ondermaatse service aan de klant of te hoge kosten als gevolg van een te grote buffervoorraad. In het vervolg van dit hoofdstuk zal aangenomen worden dat de vraag tijdens de levertijd beschreven kan worden door een normaalverdeling. Deze keuze is handig bij de uitleg van de verschillende methodes voor het bepalen van het bestelpunt aangezien in de literatuur tabellen opgemaakt zijn voor de normaalverdeling.

2.3. Kostenfuncties bij de bepaling van het optimale voorraadniveau

De keuze van een bepaalde voorraadbeslissing is afhankelijk van verschillende factoren. In deze sectie wordt hierop dieper ingegaan en worden enkele methodes voorgesteld voor het bepalen van het bestelpunt aan de hand van kost-georiënteerde prestatiemaatstaven.

Het doel van een bedrijf bestaat erin om een goede service aan de klant te bieden zonder dat het bedrijf hiervoor te hoge voorraadkosten oploopt. Het bedrijf moet hierbij een evenwicht zoeken tussen de kosten die gepaard gaan met het houden van teveel voorraad en de kosten verbonden aan een eventuele stockbreuk. Een mogelijk systeem dat een bedrijf kan gebruiken voor het controleren van zijn voorraad is het systeem (s, q) bestelpunt model. Hierbij wordt telkens een hoeveelheid q besteld als het voorraadniveau het bestelpunt s overschrijdt. Het (s, q) bestelpunt model werkt als volgt, een signaal wordt gegeven om opnieuw q producten te bestellen vanaf het moment dat het voorraadniveau zich onder het bestelpunt bevindt. Als uitgegaan wordt van een levertijd L die strikt positief is, moet een bedrijf in staat zijn aan de vraag tijdens de levertijd $E(X)$ te voldoen. De voorraad die beschikbaar is om aan de vraag tijdens de levertijd te voldoen bestaat uit twee delen. Het eerste deel komt overeen met de verwachte vraag tijdens de levertijd $E(X)$. Het tweede deel is de veiligheidsvoorraad $(s - E(X))$ of v genoemd. De grootte van de veiligheidsvoorraad is afhankelijk van het risico dat een bedrijf wil nemen om een stockbreuk te vermijden. Bedrijven die dit risico meer willen beperken leggen een hogere veiligheidsvoorraad aan.

Een veiligheidsvoorraad wordt gebruikt als bescherming tegen onzekerheid. Deze onzekerheid komt voor bij stochastische processen waarbij het onzeker is wat de werkelijke vraag tijdens een bepaalde periode zal zijn. De grootte van de veiligheidsvoorraad wordt meestal bepaald via een veiligheidsfactor k. Dit kan weergegeven worden in de volgende formule:

$$\big(s - E(X)\big) = k * \sigma(x).$$

Uit de formule volgt dat het bestelpunt s, het resultaat is van de som van veiligheidsvoorraad en de verwachte vraag tijdens de levertijd. Drie situaties kunnen zich voordoen tijdens de levertijd. In een eerste situatie arriveert de batch van q producten vooraleer de veiligheidsvoorraad aangesproken moet worden. Dit vormt geen probleem voor het bedrijf. Een tweede situatie is dat de batch van nieuwe producten aankomt vooraleer de veiligheidsvoorraad opgebruikt is. In deze situatie was de werkelijke vraag tijdens de levertijd groter als verwacht waardoor de veiligheidsvoorraad aangesproken moest worden om dit verschil op te vangen. Deze situatie is ook geen probleem voor het bedrijf. Een derde situatie is wanneer de batch met producten arriveert nadat de gehele veiligheidsvoorraad opgebruikt is. In dit geval doet zich een tekort voor. Dit tekort aan producten kan leiden tot backorders en/of verloren verkopen. Deze twee opties zullen in de volgende secties verder besproken worden. Deze situatie is niet gunstig voor het bedrijf aangezien het niet in staat was de producten op tijd aan de klant te leveren. Dit kan leiden tot ontevreden klanten en/of zelfs verlies van klanten. De kosten die hiermee gepaard gaan worden de tekortkosten genoemd. Dit is een eerste soort kost die gepaard gaat met het houden van een voorraad.

De totale kost van een voorraad kan worden opgesplitst in drie delen, namelijk *voorraadkosten* ("holding costs"), *tekortkosten* ("shortage costs") en *bestelkosten* ("replenishment costs"). Dit geeft volgende formule

$$\mathrm{C(s,q)} = C_h\mathrm{(s,q)} + C_s\mathrm{(s,q)} + C_p\,\mathrm{(s,q)} \qquad (2.1)$$

waarbij $C(s,q)$ de totale kost bedraagt, $C_h(s,q)$ de voorraadkost om 1 product één jaar in voorraad te houden, $C_s(s,q)$ de tekortkost voor 1 product bedraagt en $C_p(s,q)$ de bestelkost per bestelling voor 1 product bedraagt.

De *voorraadkost* C_h is de kost nodig voor het in voorraad houden van producten en bestaat uit verschillende elementen waaronder *werkingskosten* (operating cost) zoals onderhoud en verwarming maar ook *"out of pocket" kosten* zoals de kosten verbonden aan het huren of verzekeren van de opslagplaats. Een tweede categorie van kosten vormen de *bestelkosten* C_p. Deze kosten bestaan uit de kosten die gepaard gaan met het plaatsen van een bestelling. De bestelkosten bestaan onder andere uit *transportkosten, productiekosten en kosten voor het plaatsen van een bestelling*. Als laatste zijn er de *tekortkosten* C_s. Deze kosten ontstaan indien het bedrijf niet in staat is om de producten op tijd aan de klant te leveren. De gevolgen hiervan kunnen meetbaar zijn, zoals de extra administratieve kosten die met een stockbreuk gepaard gaan, maar kunnen ook moeilijker kwantificeerbaar zijn zoals bvb. het verlies van goodwill bij de klant. Indien een tekort optreedt, kan dit op twee manieren behandeld worden. Een eerste manier is met het gebruik van backorders. In het geval van backorders wordt het aantal producten dat tekort was in een latere bestelperiode aan de klant geleverd. Een tweede manier waarop een tekort behandeld kan worden is als zijnde een verloren verkoop. In dit geval wordt het aantal producten dat tekort was niet meer aan de klant geleverd in een volgende bestelperiode.

In de volgende twee secties wordt het backorder geval en het verlorennverkoop geval apart besproken. Het is echter ook mogelijk dat een tekort behandeld wordt als een combinatie van beide. Deze mogelijkheid zal in deze masterproef niet worden overlopen. Ook wordt in het verdere verloop van de masterproef aangenomen dat het bedrijf de producten niet zelf produceert maar het een bestelling plaats bij een ander bedrijf.

2.3.1. Backorder geval

De eerste situatie die besproken wordt is die waarbij de producten die tekort zijn als backorder behandeld worden. In dit geval worden eerst, omwille van het tekort, de orders van de klanten behandeld die niet geholpen konden worden. Als dit gebeurd is, worden de overgebleven producten uit de bestelde batch gebruikt om de voorraad aan te vullen. Vooraleer verder met de uitwerking van het backorder geval gegaan wordt, worden eerst enkele veronderstellingen gemaakt. De veronderstellingen gelden voor de uitwerking van het backorder geval alsook voor de uitwerking van het verloren verkoop geval (Silver, Pyke en Peterson, 1998). Er wordt verondersteld dat:

- De bestelhoeveelheid q constant is
- Een constant bestelpunt s
- Een levertijd verschillend van nul: $L > 0$
- De voorraadkost per eenheid product C_h is constant
- De tekortkost per eenheid product C_s is constant waarbij de tijd nodig om alle backorders te leveren niet van belang is
- De bestelkost C_p is constant

Speciaal voor het backorder geval wordt aangenomen dat backorders niet frequent voorvallen. Nu de veronderstellingen gemaakt zijn, wordt als eerste de methode van backorders uitgewerkt. Het deel dat hierbij belangrijk is, is de verwachte vraag tijdens de levertijd en hoe deze vraag kan variëren. De verwachte vraag $E(X)$ wordt afhankelijk van de levertijd proportioneel berekend ten opzichte van de verwachte vraag per jaar $E(D)$. Hetzelfde geldt voor de verwachte variantie $\sigma^2(X)$.

$E(X) = L * E(D)$

$\sigma^2(X) = L * \sigma^2(D)$

Het verwachte voorraadniveau tijdens de levertijd is afhankelijk van de veiligheidsvoorraad en de verwachte vraag tijdens de levertijd. Het verwachte voorraadniveau $E(I)$ geeft aan hoeveel producten gemiddeld in voorraad aanwezig zijn. Het verwachte voorraadniveau wordt weergeven door *(2.2)*. Om de totale kosten te berekenen wordt formule *(2.1)* gebruikt. Hierbij worden de verschillende kosten verder uitgewerkt.

De jaarlijkse voorraadkost is terug te vinden bij formule *(2.3)*. Deze wordt bekomen door de eenheidskost per jaar van een product in voorraad te vermenigvuldigen met het verwachte voorraadniveau. De jaarlijkse bestelkost is het resultaat van de vermenigvuldiging van de kost voor een bestelling te plaatsen met het aantal bestellingen per jaar. Deze kost is uitgedrukt in formule *(2.4)*. Tenslotte kan de jaarlijkse tekortkost worden berekend. Deze kost is te bepalen met behulp van formule *(2.5)*. De jaarlijkse tekortkost is opgebouwd uit verschillende delen. Het eerste deel is een kost per unit C_s die toegewezen wordt aan elke eenheid product die in backorder geleverd moet worden. Als tweede moet het aantal backorders bepaald worden. Een backorder vindt plaats indien een tekort zich voordoet of anders gezegd, indien de vraag tijdens de levertijd groter is dan het aantal producten dat aanwezig was bij het begin van de levertijd. Het aantal producten dat aanwezig is bij het begin van de levertijd komt overeen met het bestelpunt s. Als de veronderstelling gemaakt wordt dat X een kansverdeling met dichtheid $f(x)$ volgt, is het verwachte aantal producten tekort gelijk aan de integraal over een interval startend van het bestelpunt en eindigend bij de bestelhoeveelheid. Dit interval wordt bekomen door het feit dat een tekort zich pas voordoet vanaf het moment dat de vraag tijdens de leverperiode groter is dan het bestelpunt en het tekort dat in backorder geleverd kan worden gelimiteerd is tot de bestelhoeveelheid q aangezien niet meer producten in backorder aan de klant geleverd kunnen worden dan in één batch in het bedrijf binnenkomen. Het verwachte aantal stock-out producten tijdens één bestelperiode wordt weergegeven in formule *(2.6)*. Het laatste deel van de jaarlijkse tekortkost richt zich op het aantal bestelperiodes per jaar. Elke keer dat besteld wordt, kan zich een backorder voordoen, als telkens q producten per keer worden besteld, kan het aantal bestellingen afgeleid worden uit de jaarlijkse vraag. De totale jaarlijkse kost wordt bekomen als de som van deze 3 kosten en is terug te vinden in *(2.7)*.

Het verwachte voorraadniveau $E(I) = \frac{1}{2} q + (s - E(X))$ (2.2)

De jaarlijkse voorraadkost = $C_h * (\frac{1}{2}q + s - E(X))$ (2.3)

De jaarlijkse bestelkost = $C_p * \frac{E(D)}{q}$ (2.4)

De jaarlijkse tekortkost = $C_s * \frac{E(D)}{q} * \int_s^q (x-s)f(x)dx$ (2.5)

Het verwachte aantal producten tekort per periode: $\int_s^q (x-s)f(x)dx$ (2.6)

De totale jaarlijkse kost: $C(s,q) = C_p * \frac{E(D)}{q} + C_h * (\frac{1}{2}q + s - E(X)) + C_s * \frac{E(D)}{q} * \int_s^q (x-s)f(x)dx$ (2.7)

In vergelijking *(2.7)* zijn twee onbekenden aanwezig namelijk q en s. Als eerste zal de waarde van q behandeld worden. De waarde van deze variabele kan bekomen worden door de principes van het "economic order quantity" (EOQ) model te gebruiken. Deze formule mag toegepast worden door de eerder gemaakte veronderstelling over het feit dat backorders niet frequent voorvallen. De redenering hierachter is dat als q voldoende groot is, wat ertoe leidt dat niet vaak een batch van q producten besteld moet worden, hierdoor het bestelpunt niet vaak overschreden wordt en de kans op een stockbreuk bijgevolg zeer gering is [1] (Hopp en Spearman, 2011).

De optimale bestelhoeveelheid q^* is gelijk aan:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 * C_p * E(D)}{c_h}} \quad (2.8)$$

Als telkens q^* besteld wordt zoals aangenomen is en de waarde vervolgens ingevuld wordt in formule *(2.7)* geeft dit formule *(2.9)*. De variabele s is hierdoor nog de enige onbekende. Om het

[1] Indien tekorten in backorders wel frequent voorvallen, kan de formule van het EOQ model met tekorten gebruikt worden voor het bepalen van q^*. Formule: $q^* = \sqrt{\frac{2*C_p*E(D)}{c_h}} * \sqrt{\frac{C_s+c_h}{C_s}}$. Axsäter (1996) en Zheng (1992) vonden dat dit een goede benadering voor de bestelhoeveelheid q^* is.

optimale bestelpunt s^* te bepalen, moet *(2.9)* naar s afgeleid worden en gelijkgesteld aan nul. Deze afleiding in terug te vinden bij *(2.10)*.

$$C(s) = C_p * \frac{E(D)}{q^*} + C_h * \left(\frac{1}{2}q^* + s - E(X)\right) + C_s * \frac{E(D)}{q^*} * \int_s^{q^*} (x-s)f(x)dx \quad (2.9)$$

$$\frac{dC(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left[C_p * \frac{E(D)}{q^*} + C_h * \left(\frac{1}{2}q^* + s - E(X)\right) + C_s * \frac{E(D)}{q^*} * \int_s^{q^*} (x-s)f(x)dx\right] = 0 \quad (2.10a)$$

$$\frac{dC(s)}{ds} = C_h + C_s * \frac{E(D)}{q^*} * \frac{d}{ds}\left[\int_s^{q^*} (x-s)f(x)dx\right] = 0 \quad (2.10b)$$

$$\frac{dC(s)}{ds} = C_h - C_s * \frac{E(D)}{q^*} * \int_s^{q^*} f(x)dx = 0 \quad (2.10c)$$

Zoals eerder vermeld is de kans dat een tekort zich voordoet gelijk aan de integraal van de verdeling over het interval $[s, q^*]$. Als een optimaal bestelpunt bekomen wordt indien *(2.10c)* aan nul gelijk is, moet de kans dat een tekort zich voordoet gelijk zijn aan:

$$P(x \geq s) = \int_s^{q^*} f(x)dx = \frac{C_h * q^*}{C_s * E(D)} \quad (2.11)$$

Het optimaal bestelpunt kan bekomen worden door:

$$s^* = k * \sigma(x) + E(X) \quad (2.12)$$

De veiligheidsfactor k kan, in het geval dat de vraag normaal verdeeld is, bekomen worden uit de tabel van de standaard normaalverdeling in bijlage 1. Uit bijlage 1 kan ook de standaard verlies functie $L(Z)$ gehaald worden. $L(Z)$ geeft het verwachte aantal verloren verkopen weer als een deel van de standaard afwijking. Ter verduidelijking wordt de methode van het backorder geval toegepast op een voorbeeld.

2.3.1.1. Voorbeeld backorder geval

De gegevens voor het voorbeeld zijn als volgt:

- C_p = 24€/bestelling
- C_h = 3€/product/jaar
- C_s = 4€/product
- Winst per product = 5€
- $E(D)$ =10000 producten/jaar
- X is een normal verdeelde random variabele
- $E(X)$ = 300 producten
- $\sigma(X)$ =100 producten

Eerst wordt de optimale bestelhoeveelheid q^* bepaald. Dit wordt gedaan aan de hand van formule *(2.8)*:

$q^* \; = \; \sqrt{\frac{((2)*(24)*(1000))}{3}} \; = \; 400$ producten

Vervolgens wordt de kans berekend waarvoor het optimale bestelpunt bereikt wordt. Dit wordt gedaan aan de hand van *(2.11)* en geeft:

$$P(x \geq s) \; = \frac{3*400}{4*1000} \; = \; 0.03$$

Onder de veronderstelling dat X normaal verdeeld is, kan $P(x \geq s)$ ook geschreven worden als:

$$P(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \; \geq \; \frac{s-E(X)}{\sigma(X)}) = \; 0.03$$

Uit de standaard normaal verdeelde tabel (zie bijlage 1) wordt afgeleid dat:

$$P(x \leq s) = 1 - \; P(x \geq s) = \; 0.97 => z = 1.88 = k$$

waardoor het optimaal bestelpunt s^* gelijk is aan:

$$\boxed{s^* = \; 1.88 * \; \sigma(X) + \; E(X) = 1.88 * 100 + 300 = \; 488 \text{ producten}}$$

Dit resultaat betekent dat telkens 400 producten besteld worden indien het voorraadniveau onder 488 producten zakt. De veiligheidsvoorraad is gelijk aan $1.88 * \; \sigma(X) = 1.88 * 100 = 188$ producten. Nu de waarde voor de beslissingsvariabelen gekend zijn, kunnen de jaarlijkse kosten berekend worden via *(2.3)*,*(2.4)* en *(2.5)*. Dit geeft:

Bestelkosten = $24 \; * \; (10000) \, / \, 400 \; = \; 600€$

Voorraadkosten voor aankoophoeveelheid $= \frac{c_h * q^*}{3} \; = \; 3 \; * \; (400) \, / \, 2 \; = \; 600€$

Voorraadkosten voor veiligheidsvoorraad = $c_h \; * \; \{s - E(X)\} \; = \; 3 \; * \; (488 - 300) \; = \; 564€$

Totale voorraadkosten $= 600 + 564 = 1164€$

Tekortkosten = $10000/400 \; * \; 4 \, (100) \; * \; (0.012) \; = \; 120€$

De waarde 0.012 bij de berekening van de tekortkosten is gehaald uit de standaard normaal verlies functie tabel $L(Z)$ in bijlage 1.

2.3.2. Verloren verkopen geval

De tweede situatie die besproken wordt is die waarbij de producten die tekort zijn als verloren verkoop behandeld worden. Bij deze methode worden de producten die tekort waren niet meer in een volgende periode aan de klant geleverd. Bij de methode van de verloren verkopen (lost sales) bestaan de tekortkost uit 2 delen: enerzijds de kost van de verloren verkopen aangezien de producten niet meer aan de klant geleverd worden en anderzijds een "strafkost" voor het niet voldoen aan de vraag van de klant.

Aangezien bij deze methode geen backorders plaatsvinden, verandert het gemiddelde voorraadniveau aangezien het aantal producten dat tekort was niet naar de klant wordt verstuurd maar bij de voorraad bijgevoegd wordt. Dit zorgt ervoor dat formule *(2.3)* verandert naar:

$$E(I) = \frac{1}{2}\, q + s - E(X) + \int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx \qquad (2.13)$$

en bijgevolg ook de formule van de jaarlijkse voorraadkost verandert naar:

$$C_h * (\frac{1}{2}q + s - E(X) + \int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx) \qquad (2.14)$$

Hierdoor verandert de totale kost naar *(2.15)* (Silver, Peterson en Pyke, 1998). Als, zoals in sectie 2.3.1, de veronderstelling gemaakt wordt dat de optimale bestelhoeveelheid q^* gelijk is aan $\sqrt{\frac{2*C_p*D}{C_h}}$, kan de waarde van q^* in *(2.15)* ingevuld worden. Dit geeft formule *(2.16)*. De resterende onbekende in de vergelijking is het bestelpunt s. Voor het optimaal bestelpunt te bekomen wordt *(2.16)* naar s afgeleid en gelijkgesteld aan nul. Deze afleiding is te zien in *(2.17)*.

$$C(s,q) = C_p * \frac{E(D)}{q} + C_h * \left(\frac{1}{2}\text{q} + s - E(X) + \int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx\right) + C_s * \frac{E(D)}{q} * \int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx \qquad (2.15)$$

$$C(s) = C_p * \frac{E(D)}{q^*} + C_h * \left(\frac{1}{2}q^* + s - E(X) + \int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx\right) + C_s * \frac{E(D)}{q^*} * \int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx \qquad (2.16)$$

$$\frac{dC(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left[C_p * \frac{E(D)}{q^*} + C_h * \left(\frac{1}{2}q^* + s - E(X) + \int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx\right) + C_s * \frac{E(D)}{q^*} * \int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx\right] = 0 \qquad (2.17a)$$

$$\frac{dC(s)}{ds} = C_h + C_h * \frac{d}{ds}\left[\int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx\right] + C_s * \frac{E(D)}{q^*} * \frac{d}{ds}\left[\int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx\right] = 0 \qquad (2.17b)$$

$$\frac{dC(s)}{ds} = C_h - C_h * \int_s^{\infty} f(x)dx - C_s * \frac{E(D)}{q^*} * \int_s^{\infty} f(x)dx = 0 \qquad (2.17c)$$

$$\frac{dC(s)}{ds} = C_h - \left\{\left[\frac{C_h*q^*}{q^*} + \frac{C_s*E(D)}{q^*}\right] * \int_s^{\infty} f(x)dx\right\} = 0 \qquad (2.17d)$$

Het bestelpunt waarvoor de totale kosten geminimaliseerd worden bekomen indien *(2.17d)* gelijk is aan nul. Hiervoor moet de kans dat een tekort zich voordoet gelijk zijn aan:

$$P(x \geq s) = \int_s^{\infty} f(x)dx = \frac{c_h*q^*}{c_s*E(D)+c_h*q^*} \qquad (2.18)$$

Het optimaal bestelpunt kan bekomen worden door $s^* = k * \sigma(X) + E(X)$. Ter verduidelijking wordt de methode van de verloren verkopen toegepast op een voorbeeld.

2.3.2.1. Voorbeeld verloren verkopen

De gegevens voor het voorbeeld zijn dezelfde als het voorbeeld uit *sectie 2.3.1.1*.

Enkel de tekortkost is hier verandert naar $c_s = 9$

De optimale bestelhoeveelheid $q^* = 400$

De kans op een tekort waardoor de totale kosten geminimaliseerd worden is gelijk aan:

$$P(x \geq s) = \frac{3 * (400)}{9 * (10000) + (3 * (400))} = 0.0132$$

Merk op dat de tekortkost c_s niet dezelfde is als in het voorbeeld van de backorders. Dit is te verklaren door het feit dat, in het geval van de methode van verloren verkopen, de producten die tekort zijn niet meer aan de klant verkocht worden wat resulteert in een extra kost van 5€/product. Dit komt overeen met de winst die gemaakt had kunnen worden door de verkoop. Daarom is c_s hier $= 4 + \textit{de verloren verkoop}\ (5) = 9€$

Om het optimale bestelpunt s^* te bereken, wordt de veiligheidsfactor k bepaald uit de tabel van de standaard normaalverdeling (zie bijlage 1). Dit geeft:

$\mathrm{P}(\mathrm{x} \leq \mathrm{s}) = 1 - P(x \geq s) = 1 - 0.0132 = 0.9868 => \mathrm{z} = 2.22 = k$

Het optimale bestelpunt is gelijk aan:

$$s^* = 2.22 * \sigma(x) + E(x) = 2.22 * 100 + 300 = 522\ \textit{producten}$$

Dit resultaat betekent dat telkens 400 producten besteld worden indien het voorraadniveau onder 522 producten zakt. De veiligheidsvoorraad is gelijk aan $2.22 * \sigma(X) = 2.22 * 100 = 222$ producten. Nu de waarde voor alle beslissingsvariabelen bekend zijn, kunnen de jaarlijkse kosten berekend worden uit *(2.4)*,*(2.5)* en *(2.13)*. Dit geeft:

Bestelkosten $= 24 * (10000) / 400 = 600€$

Voorraadkosten voor aankoophoeveelheid $= \frac{c_h * q}{3} = 3 * (400) / 2 = 600€$

Voorraadkosten voor veiligheidsvoorraad $= c_h * (s - E(X)) = 3 * (522 - 300) = 666€$

Totale voorraadkosten $= 600 + 666 = 1266€$

Tekortkosten $= 10000/400 * 9\,(100) * (0.045) = 1012.5€$

De waarde 0.045 bij de berekening van de tekortkosten is gehaald uit de standaard verlies functie tabel $L(Z)$ in bijlage 1. Dit is de methode waarbij tekorten tijdens de levertijd allemaal behandeld worden als verloren verkopen.

2.4. Veiligheidsvoorraad bepalen aan de hand van een serviceniveau beperking

In *sectie 2.3* werd het bestelpunt bepaald aan de hand van een kostenfunctie. Deze kostenfunctie werd opgedeeld in drie delen, namelijk een voorraadkost, een bestelkost en een tekortkost. Dit model wordt in de literatuur ook het "volledig kostenmodel" genoemd. In deze sectie wordt een alternatieve methode gegeven om het bestelpunt te bepalen. Deze methode maakt gebruik van een beperking voor het serviceniveau om het bestelpunt te bepalen.

2.4.1. Probleemomschrijving

Voorraadmanagers maken gebruik van optimalisatiemodellen voor het bepalen van het voorraadniveau. Deze optimalisatiemodellen houden rekening met bepaalde prestatiemaatstaven. Deze prestatiemaatstaven kunnen kost- of service-georiënteerd zijn. In *sectie 2.3* werd het optimale bestelpunt bepaald aan de hand van een kost-georiënteerd prestatiemaatstaf. Het doel hierbij was om het bestelpunt te vinden waardoor de totale kost geminimaliseerd werd. De kosten die gepaard gingen met een stockbreuk, de zogenoemde tekortkosten, werden hierbij in de kostenfunctie opgenomen. Kritiek op deze werkwijze is dat het niet gemakkelijk is om een juiste waarde voor de tekortkost te bepalen. Deze kost bestaat namelijk uit moeilijk kwantificeerbare elementen zoals bvb. het verlies van goodwill bij de klant. Dit kan ervoor zorgen dat een slechte schatting van de tekortkosten gemaakt wordt, wat resulteert in een niet-optimaal bestelpunt en bijgevolg extra kosten. Een ander nadeel bij de bepaling van het optimaal bestelpunt via kost-georiënteerde prestatiemaatstaven is dat het bestelpunt gekozen wordt zodat de totale kosten geminimaliseerd worden zonder dat hierbij rekening gehouden wordt met het serviceniveau dat aan de klant aangeboden wordt als gevolg van de keuze van het bestelpunt.

Deze problemen kunnen opgelost worden door gebruikt te maken van service-georiënteerde prestatiemaatstaven. Het probleem voor de juiste bepaling van de tekortkost wordt hiermee omzeild doordat de tekortkost niet in de kostenfunctie gebruikt wordt, maar behandeld wordt in de vorm van een beperking voor de kostenfunctie. Hierbij wordt verondersteld dat de kosten die gepaard gaan met een tekort geïncorporeerd zijn in de keuze van het serviceniveau waaraan voldaan moet worden. Het resultaat hiervan is een model waarbij de kostenfunctie enkel bestaat uit de voorraad- en bestelkosten. Deze aanpak wordt in de realiteit vaker dan het "volledig kostenmodel" gebruikt voor de beheersing van een voorraadsysteem (Lee en Nahmias, 1993; Cohen et al., 1988; Bookbinder en Tan, 1988).

De service-georiënteerde prestatiemaatstaven kunnen op verschillende manieren gedefinieerd worden. In deze masterproef wordt het bestelpunt bepaald aan de hand van een beperking voor het minimale serviceniveau. Een minimale serviceniveau beperking betekent dat in elke bestelperiode de aangeboden service aan de klant minstens gelijk moet zijn aan de, door het bedrijf, vooropgestelde service-eis. Het is ook mogelijk om het bestelpunt te bepalen aan de hand van een beperking voor het gemiddelde serviceniveau (Chen, 1996). Deze mogelijkheid zal echter niet in deze masterproef besproken worden.

2.4.2. Opbouw minimale serviceniveau model

Veronderstel een (s, q) bestelpuntmodel met continue herziening waarbij een bestelhoeveelheid q besteld wordt indien de voorraad onder een niveau s zakt. Veronderstel dat de producten die tekort zijn als backorder behandeld worden. Aangezien de tekortkost verwerkt zit in de keuze van het vooropgesteld serviceniveau, is de kostenfunctie gelijk aan:

$$(C_p \ * \frac{E(D)}{q}) + \left(C_h * \left(\frac{1}{2}q + s - E(X)\right)\right) \qquad (2.19)$$

De kostenfunctie bestaat uit de som van bestelkosten en de voorraadkosten. Het doel is om deze kostenfunctie te minimaliseren terwijl voldaan moet zijn aan een bepaald serviceniveau. Het serviceniveau kan op verschillende manieren gedefinieerd worden. In deze sectie wordt gekozen om het serviceniveau te definiëren volgens de fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in een bestelperiode. Deze service-maatstaf S_1 wordt weergegeven door:

$$\left(1 - \frac{E(x-s)_+}{q}\right) = S_1 \qquad (2.20)$$

waarbij

$E(x - s)_+$ = Het aantal producten in backorder.

Het minimale serviceniveau model is gelijk aan:

$$Min \ (C_p \ * \frac{E(D)}{q}) + \left(C_h * \left(\frac{1}{2}q + s - E(X)\right)\right)$$

beperkt tot

$$\left(1 - \frac{E(x-s)_+}{q}\right) \geq SL \qquad (2.21)$$

waarbij SL overeenkomt met de waarde voor het minimale serviceniveau waaraan voldaan moet zijn.

2.4.3. Optimalisatie minimale serviceniveau model

Deze methode wordt nu toegepast op een voorbeeld. Veronderstel een normaalverdeling en volgende zaken die gegeven zijn:

- C_p = 24€/bestelling
- C_h = 3€/product/jaar
- $E(D)$ =10000 producten/jaar
- X is een normal verdeelde random variabele
- $E(X)$ = 300 producten
- $\sigma(X)$ =100 producten

Stel dat een serviceniveau voor de fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in een bestelperiode van 95% vooropgesteld wordt, wat is de combinatie (s, q) waarvoor de kosten geminimaliseerd worden en tegelijkertijd aan het vooropgestelde serviceniveau voldaan wordt?

Het minimale serviceniveau model is gelijk aan:

$$Min\ 24\ *\ \frac{10000}{q} + \left(3\ *\ \left(\frac{1}{2}q\ +\ s\ -\ 300\right)\right)$$

beperkt tot

$$\left(1 - \frac{E(x-s)_+}{q}\right) \geq 95\%$$

Als verondersteld wordt dat tekorten niet vaak optreden, wordt de optimale bestelhoeveelheid gegeven door:

$$q^*\ =\ \sqrt{\frac{2*C_p*E(D)}{c_h}} = 400 \text{ eenheden}$$

Aangezien voldaan moet worden aan een vooropgesteld serviceniveau van 95%, moet het bestelpunt gevonden worden waarbij $\left(1 - \frac{E(x-s)_+}{q}\right) \geq 95\%$. Aangezien de verdeling van de vraag hier gekend is, kan het bestelpunt berekend worden via de standaard verlies functie door middel van volgende formule:

$$L(z) =\ (1 - S_1) *\ \frac{q*}{\sigma(X)} = 0.2$$

Uit de standaard verlies functie in bijlage 1 volgt dat:

$$L(z) = 0.2 ==> z = 0.49 = k$$

Het optimale bestelpunt is gelijk aan:

$$\boxed{s^* =\ k *\ \sigma(x) +\ E(X) = 0.49 * 100 + 300 = 349\ producten}$$

De veiligheidsvoorraad is hierbij gelijk aan 49 eenheden. De combinatie waarvoor de kosten geminimaliseerd worden terwijl tegelijk aan het vooropgestelde serviceniveau voldaan is gelijk aan (349,400). De totale kost is gelijk aan:

$$24\ *\ \frac{10000}{400} + \left(3\ *\ \left(\frac{1}{2} * 400\ \ +\ 349 -\ 300\right)\right) = 1347€$$

Bovenstaand voorbeeld toont aan hoe het minimale serviceniveau model opgelost kan worden indien de verdeling van de vraag gekend is. Dit probleem wordt echter bemoeilijkt in het geval dat de verdeling van de vraag niet gekend is. Op deze situatie wordt dieper ingegaan in het verdere verloop van de masterproef. Bij de bepaling van het optimale bestelpunt werd tot nu toe, steeds verondersteld dat de verdeling van de vraag gekend was. Vanaf hier wordt, in het verdere verloop van deze masterproef, nu gefocust op de bepaling van het optimaal bestelpunt indien de verdeling van de vraag niet gekend is.

3. Serviceniveau

Dit hoofdstuk bouwt verder op het service-element uit het vorige hoofdstuk. Het serviceniveau kan op verschillende manieren gedefinieerd worden. In de volgende secties zal een overzicht gegeven worden van vier service-maatstaven die verder gebruikt zullen worden in deze masterproef.

De vier service-maatstaven die hieronder besproken worden zijn variaties op één algemene integraal. Deze integraal is van de vorm:

$$\int_a^b y(x)f(x)dx \qquad (3.1)$$

Hierbij wordt een toevalsgrootheid X gedefinieerd als de vraag over een bepaald (eindig) tijdsinterval. De vraag X volgt een kansverdeling F met F gedefinieerd over een eindig interval $[a, b]$ en $a \leq b$. $f(x)$ is de dichtheidsfunctie van de kansverdeling F en $y(x)$ is een functie die gerelateerd is aan de service-maatstaf.

3.1. Service-maatstaf één: De fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in een bestelperiode.

Een eerste service-maatstaf S_1 is de fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in een bestelperiode. Deze maatstaf kan teruggebracht worden naar een resultaat uit de verzekeringswiskunde (Goovaerts, De Vylder en Haezendonck, 1984). Hierbij kan een verzekeringsbedrijf gebruik maken van een "stop-loss" premie. Deze premie zorgt ervoor dat de schadeclaim voor een verzekeringsbedrijf beperkt wordt tot een bepaald bedrag t. Als de schadeclaim oploopt tot boven het bedrag t, wordt het deel van de schade boven t door een herverzekeringsbedrijf op zich genomen. De "stop-loss" premie wordt bepaald aan de hand van het verwachte bedrag dat het herverzekeringsbedrijf denkt op zich te moeten nemen.

Als dit concept toegepast wordt op voorraadbeheer, kan een tekort zich tijdens elke bestelperiode voordoen en wordt het verwachte aantal producten dat niet op tijd geleverd wordt per periode weergeven door:

$$\int_a^b (x-s)_+ f(x)dx \qquad (3.2)$$

In de algemene integraal is de functie die gerelateerd is aan de prestatiemaatstaf $y(x)$ vervangen door $(x-s)_+$ waarbij s in de functie een parameter is die het bestelpunt voorstelt. Het plusteken in de formule geeft aan dat de integraal enkel berekend kan worden indien $(x-s)$ positief is of anders gezegd in het geval dat de vraag hoger dan het bestelpunt is waardoor een tekort optreedt. Als voorwaarde wordt gesteld dat $a \leq s \leq b$.

Aangezien de eerste service-maatstaf uitgedrukt wordt als een fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt en de integraal van *(3.2)* het aantal producten weergeeft dat niet op tijd geleverd wordt, wordt deze prestatiemaatstaf gedefinieerd als:

$$q * (1 - S_1) = \int_a^b (x - s)_+ f(x)dx \quad (3.3)$$

Het serviceniveau S_1 kan uit *(3.3)* afgezonderd worden en is gelijk aan:

$$\left(1 - \frac{\int_a^b (x-s)_+ f(x)dx}{q}\right) = S_1 \quad (3.4)$$

Voor het bepalen van het niveau van de eerste service-maatstaf is de waarde van de parameter s, het niveau van het bestelpunt verreist. Afhankelijk van het niveau van deze waarde gaat het serviceniveau hoger of lager liggen. Zoals eerder in deze sectie aangehaald, wordt het serviceniveau bepaald aan de hand van het aantal producten tekort in vergelijking met de bestelhoeveelheid q om de fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in één bestelperiode te bekomen. De waardes voor de twee parameters s en q kunnen eventueel bepaald worden met de kostenfuncties die in het vorige hoofdstuk aan bod kwamen.

3.2. Service-maatstaf twee: De kans op geen tekort in een bestelperiode

Een tweede service-maatstaf S_2 is de kans op geen tekort in een bestelperiode. In tegenstelling tot bij service-maatstaf één, is het aantal producten dat tekort is tijdens een bestelperiode hier niet van belang. De focus ligt enkel op het feit of een tekort zich voordoet of niet. Dit wordt weergegeven door:

$$\int_a^b 1_{x>s} f(x)dx \quad (3.5)$$

Hierbij is s een parameter in de functie die het bestelpunt voorstelt en als voorwaarde wordt gesteld dat $a \leq s \leq b$. De functie die gerelateerd is aan de service-maatstaf uit de algemene integraal *(3.1)* is hier gelijk aan:

$$y(x) = 1_{x>s} \quad (3.6)$$

waarbij $\begin{Bmatrix} y(x) = 0 \ \ als\ x \leq s \\ y(x) = 1\ als\ x > s \end{Bmatrix}$

Als het serviceniveau S_2 gedefinieerd wordt door de kans op geen tekort per bestelperiode, dan wordt S_2 geschreven als:

$$S_2 = 1 - \int_a^b 1_{x \geq s} f(x)dx \quad (3.7)$$

Zoals het geval bij service-maatstaf één is het serviceniveau afhankelijk van de waarde van de parameter s. Een verschil met de eerste parameter is wel dat de bestelhoeveelheid hier niet van belang is om de waarde voor de service-maatstaf te bepalen. De parameter s kan bekomen worden met behulp van de kostenfuncties uit het vorige hoofdstuk.

3.3. Service-maatstaf drie: De fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode.

Een derde service-maatstaf S_3 is de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode. De focus ligt hier, in tegenstelling tot service-maatstaf één waar de focus enkel op het aantal producten tekort ligt en niet hoe deze tekorten behandeld worden, op het verwacht aantal producten dat in backorder aan de klant geleverd wordt. Dit wordt weergegeven door:

$$\int_a^b max(0, \min[(x-\mathrm{s}), \mathrm{q}])f(x)dx \qquad (3.8)$$

Hierbij is s een parameter in de functie die het bestelpunt voorstelt en q een parameter voor de vaste bestelhoeveelheid. Als voorwaarde wordt gesteld dat $a \leq s \leq b$ en $q \geq 0$. De functie die gerelateerd is aan de service-maatstaf uit de algemene integraal *(3.1)* is hier gelijk aan:

$$y(x) = max(0, \min[(x-\mathrm{s}), \mathrm{q}]) \qquad (3.9)$$

waarbij $\left\{\begin{array}{c} y(x) = 0 \;\; als\, x \leq s \\ y(x) = (x-\mathrm{s}) als\, s \leq x \leq q \\ y(x) = q \; als\, s + q < x \end{array}\right\}$

Als het serviceniveau S_3 gedefinieerd wordt door de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode, dan wordt S_3 geschreven als:

$$S_3 = 1 - \frac{\int_a^b max(0, \min[(x-\mathrm{s}), \mathrm{q}]f(x)dx}{q} \qquad (3.10)$$

Omdat maatstaf drie focust op het aantal tekort in backorders, is het maximaal aantal tekort dat als backorder vervuld kan worden gelijk aan de bestelhoeveelheid. Er wordt namelijk verondersteld dat alle tekorten in backorders in de eerst opeenvolgende periode aan de klant geleverd moeten worden. Dit kan enkel indien het tekort in backorders gelimiteerd wordt tot het aantal producten dat binnenkomt uit een bestelling bij de leverancier. Indien deze veronderstelling niet gemaakt wordt, zou een situatie kunnen voorvallen waarbij bepaalde tekorten niet in de eerst opeenvolgende periode als backorder vervuld kunnen worden. Het aantal tekort in backorder dat, door gebrek aan aanwezige stock, niet in de eerst opeenvolgende periode aan de klant geleverd kan worden, wordt of als tekort in backorder behouden en behandelt in de periode erna samen met de backorders van die bestelperiode, of niet meer geleverd aan de klant omdat de klant deze producten niet meer wenst. Dit resulteert in extra kosten voor het bedrijf en klantenontevredenheid door de slechte service die aangeboden wordt. Met deze situatie zal echter in deze masterproef geen rekening gehouden worden.

Voor het bepalen van service-maatstaf drie zijn twee beslissingsvariabelen vereist. Naast het niveau van het bestelpunt s zoals het geval was bij de twee vorige maatstaven, speelt bij deze maatstaf ook de bestelhoeveelheid q een rol. Dit is namelijk van belang voor het maximaal aantal tekort in backorders te bepalen dat tijdens één bestelperiode kan optreden. Ook in dit geval kunnen de parameters s en q bepaald worden met behulp van de kostenfuncties uit het vorige hoofdstuk.

3.4. Service-maatstaf vier: De kans op een gebeurtenis dat de vraag met grootte gelegen in een bepaald interval voorvalt in een bestelperiode.

Een vierde maatstaf S_4 is de kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval $[t_1, t_2]$ voorvalt in een bestelperiode. Dit wordt weergegeven door:

$$\int_a^b 1_{t_1 \leq x_i \leq t_2} f(x)dx \tag{3.11}$$

Hierbij is de functie die gerelateerd is aan de service-maatstaf uit de algemene integraal *(3.1)* gelijk aan:

$$y(x) = 1_{t_1 \leq x_i \leq t_2} \tag{3.12}$$

waarbij $\left\{ \begin{array}{c} y(x) = 0 \ \ als\ x < t_1 \\ y(x) = 1\ als\ t_1 \leq x \leq t_2 \\ y(x) = 0\ als\ t_2 < x \end{array} \right\}$

t_1 en t_2 zijn twee parameters van de functie $y(x)$ waarbij verondersteld wordt dat $t_1 \leq t_2$. Deze twee parameters hebben alleenstaand geen conceptuele betekenis. Daarom is een kostenfunctie vereist zodat een betekenis aan de parameters gegeven kan worden. Dit wordt verduidelijkt door een voorbeeld:

In de tekst van Sankarasubramanian en Kumaraswamy (1983) wordt getracht een optimale bestelhoeveelheid q te bepalen zodat de kans gemaximaliseerd wordt dat de winst groter of gelijk is aan een vooropgesteld bedrag R. Dit wordt gedaan voor een "newsboys probleem" of één-periode voorraadmodel. Dit is een model waarbij de vraag naar een product niet volledig gekend is en het product maar bruikbaar is in één periode. Als een bepaalde bestelhoeveelheid q gekozen wordt, wil dit zeggen dat indien de vraag hoger dan de bestelhoeveelheid is, elke eenheid product van de vraag boven de bestelhoeveelheid onbeantwoord blijft en resulteert in een verloren verkoop. Indien de vraag lager dan de bestelhoeveelheid is, kan elke eenheid product dat overblijft niet meer gebruikt worden wat resulteert in schrootkosten. Hierbij is de beslissing variabele de bestelhoeveelheid q. Aangezien de winst Z afhankelijk is van de willekeurige vraag, volgt hieruit dat de winst ook een random variabele is. De verdeling van de winst is afhankelijk van de verdeling van de vraag alsook de keuze van de bestelhoeveelheid q. Als verondersteld wordt dat de waardes van de parameters voor de verkoopsprijs, kostprijs, tekortkost en schrootkost gekend zijn, kan de winst Z bekomen worden door:

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} pX + n(q - X) - cq\ voor\ X \leq q \\ pq - c_s(X - q) - cq\ voor\ X \geq q \end{array} \right\} \tag{3.13}$$

waarbij

X = De grootte van de vraag in één periode

$f(x)$ = De dichtheidsfunctie van de vraag

p = De verkoopprijs per eenheid

c = De kostprijs per eenheid

c_s = De tekortkost per eenheid

n = De schrootkost per eenheid

q = De bestelhoeveelheid (=beslissingsvariabele)

Z = De winst in een periode

Formule *(3.13)* toont aan dat de winst toeneemt indien de bestelhoeveelheid hoger is dan de vraag en de winst afneemt indien de bestelhoeveelheid lager is dan de vraag. Een vooropgestelde winst R wordt bekomen indien de vraag gelijk is aan t_1 of t_2. Deze grenswaarden worden bekomen door X uit *(3.13)* af te zonderen wat resulteert in:

$$t_1 = \frac{R+(c-n)q}{p-n} \tag{3.14}$$

$$t_2 = \frac{(p+c_s-c)q-R}{c_s} \tag{3.15}$$

Indien de vraag gelijk is aan een waarde in het interval $[t_1, t_2]$, is de gerealiseerde winst groter of gelijk aan het vooropgesteld bedrag R. Bovenstaand voorbeeld geeft aan hoe, gegeven een bepaalde kostenfunctie (in dit geval een winstfunctie), een betekenis aan een interval $[t_1, t_2]$ gegeven kan worden, namelijk het interval waarvoor een vooropgestelde winst behaald wordt.

4. De bepaling van het bestelpunt in het geval van gedeeltelijke informatie

In dit hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van methoden die, indien niet de volledige informatie over de verdeling van de vraag geweten is, gebruikt kunnen worden bij het bepalen van het bestelpunt. In hoofdstuk twee werden reeds enkele methodes overlopen voor de bepaling van het bestelpunt. Het verschil met dit hoofdstuk is echter dat in hoofdstuk twee de verdeling van de vraag gekend is waar in dit hoofdstuk dit niet geweten is. Dit hoofdstuk is opgesplitst in twee delen. In het eerste deel wordt het bestelpunt bepaald op analytische wijze. In het tweede deel wordt een oplossing voor het bestelpunt gevonden met behulp van lineaire programmering (LP).

Vooraleer de methodes voor het bepalen van het bestelpunt in het geval van gedeeltelijke informatie besproken worden, wordt eerst dieper ingegaan op de implicaties die gepaard gaan met het feit dat niet alle informatie over de verdeling van de vraag gekend is. Het oplossen van dit vraagstuk is afhankelijk van de hoeveelheid informatie en welke informatie beschikbaar is over de verdeling van de vraag. Indien de verdeling van de vraag gekend is, kan het bepalen van het bestelpunt, gegeven een vooropgesteld serviceniveau van één van de service-maatstaven, herleid worden tot de berekening van de inverse cumulatieve kansverdeling $(F(X))^{-1}$. Dit werkwijze werd in hoofdstuk twee toegepast.

Het vraagstuk wordt echter moeilijker in het geval dat niet de volledige informatie over de verdeling van de vraag gekend is. Aangezien niet de volledige informatie beschikbaar is, kan de vraag op verschillende manieren verdeeld zijn (normaal, Poisson, Gamma, …). Dit heeft als gevolg dat, afhankelijk van de verdeling van de vraag, er voor hetzelfde vooropgesteld serviceniveau meerdere waarden voor het bestelpunt bekomen worden. Om rekening te houden met de verschillende verdelingen bestaat de oplossing in het geval van gedeeltelijke informatie niet uit één waarde voor het bestelpunt maar uit een interval $[a, b]$ van verschillende waarden. De grenswaarden a en b komen respectievelijk overeen met het meest optimistische en het meest pessimistische scenario. Hierbij komt, vanuit het standpunt van een bedrijf, het meest pessimistische scenario overeen met de vraag: wat moet het bestelpunt op zijn minst zijn zodat in elke mogelijke situatie het verwachte serviceniveau voldaan is aan het vooropgestelde doel? Dit wil zeggen dat indien de waarde van de bovengrens b als bestelpunt gekozen wordt, er geen verdeling bestaat waarbij het verwachte serviceniveau lager is dan het vooropgestelde doel. Als de waarde voor de ondergrens a als bestelpunt gekozen wordt, is de kans zeer groot dat het verwachte serviceniveau lager is dan het vooropgestelde doel. Dit scenario is meer van de academische aard aangezien het overeenkomt met de vraag: kan er één verdeling gevonden worden waarvoor het verwachte serviceniveau aan het vooropgestelde doel voldaan is, Deze vraag is echter niet interessant vanuit het perspectief van het bedrijf. In het verdere verloop van de masterproef zal dan ook voornamelijk gefocust worden op de bepaling van de bovengrens van het interval.

4.1. De bepaling van het bestelpunt op analytische wijze

In dit deel wordt de veiligheidsvoorraad analytisch bepaald voor de vier bestudeerde service-maatstaven. Zoals eerder aangetoond, kunnen deze maatstaven uitgedrukt worden als de verwachte waarde van een functie waarbij de verwachte waarde bekomen wordt vanuit de verdeling van de vraag tijdens de levertijd. In het geval van volledige informatie over de verdeling, wordt één enkele waarde bekomen voor deze service-maatstaven. In het geval van gedeeltelijke informatie echter, kunnen meervoudige waarden (of zelfs een interval van waarden) bekomen worden naargelang de verdeling van de vraag tijdens de levertijd met dezelfde gedeeltelijke informatie. Hierbij is het belangrijk om te weten of dit interval van waarden eindige grenzen heeft en, zo ja, wat de boven- en ondergrens hiervan is. Afhankelijk van deze twee waardes kan een beslissing voor het optimale bestelpunt genomen worden. In het volgende deel wordt een methode uitgelegd die gebruikt wordt voor het analytisch bepalen van de boven en ondergrens. Als de beslissingsnemer dan een bepaalde service-maatstaf vooropstelt, bvb.: de kans op een tekort in een bestelperiode is vijf procent, fungeert de bovengrens als het meest pessimistische scenario waarbij de verwachte waarde van de gekozen service-maatstaf onafhankelijk van de verschillende verdelingen van de vraag in niet groter is dan vijf procent. De ondergrens is dan bijgevolg het meest optimistische scenario waarbij minstens één verdeling bestaat waarbij de verwachte waarde van de gekozen service-maatstaf gelijk is aan het vooropgestelde serviceniveau (bvb. 95% kans op een geen stockbreuk). In de meeste gevallen zal de waarde hoger zijn dan het vooropgestelde doel indien de waarde van de ondergrens gekozen wordt. De beslissingsnemer kan ook opteren voor een waarde tussen deze twee extremen afhankelijk van de aard van de beslissingsnemer.

Achtereenvolgens zal de methode voor het berekenen van de vier service-maatstaven uitgewerkt worden.

4.1.1. Bepalen boven- en ondergrens service-maatstaf één

De eerste service-maatstaf S_1 betreft de fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in een bestelperiode. Zoals eerder vermeld wordt deze service-maatstaf uitgedrukt in functie van het aantal producten dat niet op tijd geleverd wordt. Dit leidt tot de volgende formule voor S_1:

$$q * (1 - S_1) = \int_a^b (x - s)_+ f(x) dx$$

In het verdere verloop van deze paragraaf zal de focus liggen op het aantal producten dat niet op tijd geleverd kan worden. Het is hierna echter gemakkelijk om dit om te zetten in de overeenkomstige waardes voor service–maatstaf één. Dit zal verder verduidelijkt worden aan de hand van een voorbeeld.

Als X gedefinieerd wordt als een random variabele die de vraag tijdens de levertijd voorstelt met s het voorraadniveau aan het begin van de levertijd (bestelpunt) en W het aantal producten tekort, dan kan de relatie tussen W en X weergeven worden door:

$$W = \begin{Bmatrix} 0 \; als \; x \; \leq s \\ x - s \; als \; x \geq s \end{Bmatrix}$$

Zoals eerder aangehaald is de situatie van het verwachte aantal producten tekort vergelijkbaar met die van de "stop-loss premie" in de herverzekeringswiskunde. Dit is handig aangezien reeds een methode bestaat voor de afleiding van de boven- en ondergrens van de "stop-loss premie". Het risico en bijgevolg het niveau van de premie is hier afhankelijk van verschillende beperkingen zoals het bereik en/of het eerste en/of tweede moment van de verdeling (Heijnen en Goovaerts, 1989).

Het bereik van de vraag tijdens de levertijd kan gedefinieerd worden over een eindig interval $[a, b]$ waarbij $a \neq 0$. Dit bereik wordt soms voor de eenvormigheid omgevormd naar een interval $[0, b_0]$. Indien het eerste en tweede moment van de verdeling alsook de waarden voor $[a, b]$ gekend zijn, kan de verdeling van een interval $[a, b]$ omgevormd worden naar een interval $[0, b_0]$ door middel van volgende formules:

$$a_0 \; = 0$$

$$b_0 = b - a$$

$$m_{1,0} = m_1 - a$$

$$m_{2,0} = m_2 - 2am_1 + a^2$$

Waarbij het eerste en tweede moment weergeven worden als: $m_1 = E(X) \; en \; m_2 = E(X^2)$. In het vervolg van de masterproef zal verondersteld worden dat de verdelingen gedefinieerd zijn over een interval $[0, b_0]$. b_0 zal voor het gemak vervangen worden door b aangezien hierrond geen verwarring kan ontstaan. Hierdoor is $m_{1,0} = m_1$ en $m_{2,0} = m_2$ waardoor voor de eenvoud van notatie m_1 en m_2 in het verdere verloop van de masterproef gebruikt zal worden.

Bij de bepaling van de boven- en ondergrens (afgekort "bov" en "ond") voor het verwachte aantal producten tekort moet een waarde gevonden worden voor de volgende integralen:

$$\underset{F \in \emptyset}{bov} \int_0^\infty (x - s)_+ dF(x)$$

$$\underset{F \in \emptyset}{\text{ond}} \int_0^\infty (x - s)_+ dF(x)$$

waarbij $\emptyset$ de verzameling is van alle verdelingsfuncties met bereik $[0, b]$ en eerste- en tweede moment $m_1 = E(X) \; en \; m_2 = E(X^2)$.

Voor de oplossing van deze integralen wordt gezocht naar een polynoom $P(x)$ van graad 2 of lager. De reden hiervoor is dat voor een polynoom $P(x)$ van de graad 2 of lager, de integraal $\int_0^b P(x)dF(x)$ enkel bepaald wordt door de waardes van het eerste en tweede moment. Bijgevolg neemt deze integraal dezelfde waarde aan voor alle verdelingen in $\emptyset$. Indien een polynoom gevonden wordt waarvoor geldt dat:

$$\begin{Bmatrix} P \geq f \ op \ [0, b] \ voor \ de \ bovengrens \\ P \leq f \ op \ [0, b] \ voor \ de \ ondergrens. \end{Bmatrix}$$

bestaat een verdeling G in $\emptyset$ waarbij volgende gelijkheid geldt:

$$\int_0^b P(x)dG(x) = \int_0^b f(x)dG(x)$$

Deze verdeling G kan een tweepunts- of driepunts-verdeling zijn. Een verdeling wordt twee- of driepunts-verdeling genoemd indien de gehele massa enkel geconcentreerd is in respectievelijk twee of drie punten. Voor deze verdelingen kan bovenstaande gelijkheid enkel gelden wanneer $P(x)$ en $f(x)$ gelijk zijn in de massapunten van G. Hieruit kan, gegeven het eerste en tweede moment m_1, m_2, de optimale waarde voor de boven- en ondergrens afgeleid worden. Voor een meer uitgebreide uitleg van de methode voor de bepaling van de boven- en ondergrens verwijs ik naar de teksten van Janssen, Haezendonck en Goovaerts (1986) en Heijnen en Goovaerts (1989).

Met het gebruik van bovenstaande methode kan de boven- en ondergrens berekend worden. Het resultaat is terug te vinden in *tabellen 4.1* tot *4.4* in *bijlage twee*. *Tabellen 4.1* en *4.2* geven respectievelijk de boven- en ondergrens voor het verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode indien de waarde voor het bestelpunt gelijk is aan s. Dit is echter niet zo interessant vanuit het perspectief van het bedrijf. Het bedrijf is namelijk niet geïnteresseerd om, indien het een bepaald bestelpunt kiest, als uitkomst een waarde voor het aantal producten tekort te krijgen. Het bedrijf wil in staat zijn een waarde voor het aantal producten tekort te kiezen en als oplossing de waarde voor het bestelpunt te krijgen waarmee dit doel gerealiseerd wordt. Deze redenering is terug te vinden in *tabellen 4.3* en *4.4* in *bijlage twee*. Hier worden de optimale waarde van de boven- en ondergrens voor het bestelpunt weergegeven indien de beslissingsnemer een bepaald serviceniveau vooropstelt.

Het gebruik van de boven- en ondergrens wordt nu geïllustreerd aan de hand van een voorbeeld. Veronderstel dat de vraag tijdens de levertijd kan variëren tussen 0 en 70 eenheden. Verder is het eerste moment gelijk aan 20 eenheden en het tweede moment gelijk aan 600 eenheden. Uit deze gegevens kunnen de waardes voor $0'$ en b' bekomen worden namelijk $0' = 30$ en $b' = 16$. Als het bedrijf bij het begin van de levertijd 30 eenheden in voorraad heeft, kan de boven- en ondergrens voor het verwachte aantal producten tekort berekend worden volgens de formules in *tabellen 4.1* en *4.2*.

Dit geeft voor de bovengrens dat de waarde s ligt tussen:

$\frac{0'}{2} \leq s \leq \frac{b+b'}{2}$ of $[15 \leq s \leq 43]$ met $0' = \frac{(m_2 - m_1 * a)}{(m_1 - \mathrm{a})}$ en $b' = \frac{(m_2 - m_1 * b)}{(m_1 - \mathrm{b})}$

wat resulteert in een bovengrens van 3.66 eenheden. Dit resultaat betekent dat indien het bestelpunt gelijk is aan 30 eenheden, het verwacht maximaal aantal producten tekort in een bestelperiode niet groter kan zijn dan 3.66 onafhankelijk van welke verdeling de vraag volgt, gegeven de gedeeltelijke informatie. Als verondersteld wordt dat bestelhoeveelheid 100 eenheden bedraagt, is service-maatstaf één S_1 minimaal gelijk aan 96.34%. Voor de ondergrens wordt dezelfde berekening gedaan wat resulteert in een ondergrens van 0 eenheden. Dit betekent dat een verdeling bestaat waarvoor het verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode gelijk is aan 0 indien het bestelpunt gelijk is aan 30 eenheden. Dit resulteert in een serviceniveau $S_1 = 100\%$.

Tabellen 4.3 en *4.4* kunnen gebruikt worden om het optimale bestelpunt te bepalen gegeven een vooropgesteld serviceniveau. Veronderstel dat de beslissingsnemer een serviceniveau S_1 van 95% vooropstelt. Veronderstel dat de vaste bestelhoeveelheid gelijk is aan 100 eenheden. Met behulp van de formule $q * (1 - S_1) = \int_a^b (x-s)_+ f(x)dx$ kan het verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode $E(w)$ berekend worden. Dit is gelijk aan is aan 5 eenheden tekort in een bestelperiode. Bij de bepaling van de bovengrens is voldaan aan de voorwaarde:

$\frac{(m_2 - {m_1}^2)}{2(b-m_1)} \leq E(w) \leq \frac{m_1}{2}$ of $[2 \leq E(w) \leq 10]$.

De bovengrens voor het optimaal bestelpunt wordt gevonden door:

$\frac{(m_2 - {m_1}^2) - 4E(w)^2 + 4E(w)m_1}{4E(w)}$ of $\frac{(600-20^2) - 4*5^2 + 4*5*20}{4*5}$

wat resulteert in een waarde van 25 eenheden. De ondergrens is gelijk aan 15 eenheden

$((m_1 - E(w)$ of $(20-5))$.

Afhankelijk van de risicoaversie van de beslissingsnemer kan een bestelpunt gekozen worden tussen $[15{,}25]$. De bovengrens fungeert hier als het meest risicoavers scenario waarbij het verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode niet hoger dan vijf kan zijn waardoor aan een minimaal serviceniveau van 95% voldaan wordt. Als voor het bestelpunt de waarde voor de ondergrens gekozen wordt, bestaat er een situatie waarvoor het verwachte aantal producten tekort niet groter is dan vijf maar de kans dat deze verdeling ook daadwerkelijk in de realiteit voorvalt is zeer klein. Dit resulteert in een situatie waarbij het vooropgestelde doel van 95% waarschijnlijk niet gehaald zal wordt.

4.1.2. Bepalen boven- en ondergrens service–maatstaf twee

De formules voor de boven– en ondergrens voor de kans op een tekort in een bestelperiode worden in deze sectie uitgewerkt. De kans op een tekort wordt weergegeven door:

$$P(X > s) = E\left[1_{[s,b]}\ (X)\right] = \int_a^b 1_{[s,b]}\ (x)\, dF(x) = \int_s^b dF(x)$$

Voor de bepaling van de boven- en ondergrens wordt verwezen naar De Schepper en Heijnen (1995). Zij bepalen in hun artikel de boven- en ondergrens voor staart-kansen (tail probabilities) in het geval van gedeeltelijke informatie. De resultaten uit hun artikel zijn toepasbaar bij de bepaling van de grenzen voor service-maatstaf twee.

Het resultaat hiervan is terug te vinden in *tabellen 4.5* tot *4.8* in *bijlage drie*. *Tabellen 4.5* en *4.6* geven respectievelijk de boven- en ondergrens voor de verwachte kans op een tekort in een bestelperiode indien het bestelpunt gelijk is aan s. In *tabellen 4.7* en *4.8* kunnen de boven- en ondergrens voor het optimale bestelpunt bepaald worden indien de beslissingsnemer een bepaald serviceniveau in termen van de kans op geen tekort vooropstelt.

Eén mogelijke oplossing wordt nu geïllustreerd aan de hand van een voorbeeld. Herneem de gegevens uit sectie *4.1.1* met $b = 70$, $m_1 = 20$ en $m_2 = 600$. Uit deze gegevens kunnen de waardes voor $0'$ en b' bekomen worden namelijk $0' = 30$ en $b' = 16$. Als het bedrijf bij het begin van de levertijd 30 eenheden in voorraad heeft, kan de boven- en ondergrens voor de verwachte kans op een tekort in een bestelperiode berekend worden volgens de formules in *tabellen 4.5* en *4.6*.

Dit geeft voor de bovengrens dat de waarde s ligt tussen:

$b' < s \leq 0'$ of $[16 \leq s \leq 30]$

wat resulteert in een bovengrens van 0.67 of 67%. Dit resultaat betekent dat indien het bestelpunt gelijk is aan 30 eenheden, de verwachte kans op een tekort niet geval groter kan zijn dan 67 procent onafhankelijk de verdeling van de vraag, gegeven de gedeeltelijke informatie. S_2 is bijgevolg minimaal gelijk is aan 33%. Voor de ondergrens wordt dezelfde berekening gedaan wat resulteert in een ondergrens van 0%. Dit betekent dat een verdeling van de vraag bestaat waarvoor de verwachte kans op een tekort in een bestelperiode gelijk is aan 0 procent indien het bestelpunt gelijk is aan 30 eenheden. De kans op geen tekort S_2 is bijgevolg gelijk aan 100%.

Het optimale bestelpunt, gegeven een vooropgesteld serviceniveau, wordt berekend aan de hand van *tabellen 4.7* en *4.8*. Veronderstel dat de beslissingsnemer een kans op een tekort in een bestelperiode van 10% vooropstelt, dus $S_2 = 90\%$. Met behulp van *tabellen 4.7* en *4.8* kunnen de grenzen voor het optimaal voorraadniveau bepaald worden. Voor de bovengrens is voldaan aan de voorwaarde:

$\frac{(m_2 - {m_1}^2)}{b^2 - 2bm_1 + m_2} \leq E(1 - S_2) \leq \frac{{m_1}^2}{m_2}$ of $[0.07 \leq E(1 - S_2) \leq 0.67]$

De bovengrens voor het optimaal voorraadniveau kan bekomen worden door:

$$\frac{\boldsymbol{m_1 E(1-S_2) + \sqrt{(E(1-S_2)^2 - E(1-S_2))({m_1}^2 - m_2)}}}{\boldsymbol{E(1-S_2)}} \text{ of } \frac{(20*0.1+\sqrt{(0.1^2-0.1)*(20^2-600)}}{0.1}$$

wat resulteert in een bovengrens van 62.4 eenheden. De ondergrens kan bekomen worden door de formule:

$$\frac{\boldsymbol{m_1(E(U)-1) + \sqrt{{m_1}^2(E(1-S_2)-1)^2 - (E(1-S_2)-1)(m_2 E(1-S_2) - {m_1}^2)}}}{\boldsymbol{E(1-S_2)-1}} \text{ of } \frac{(20*0.1-1)+\sqrt{20^2*(0.1-1)^2-((0.1-1)*(600*0.1-20^2))}}{0.1-1}$$

wat resulteert in een ondergrens van 15.3 eenheden. Afhankelijk van de risicoaversie van de beslissingsnemer kan een bestelpunt gekozen worden tussen $[15.3, 62.4]$. De bovengrens fungeert hier als het meest risicoavers scenario waarbij de verwachte kans op geen tekort niet lager is dan 90 procent.

4.1.3. Bepalen boven- en ondergrens service–maatstaf drie

De derde service-maatstaf S_3 betreft de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode. Hierbij wordt gefocust op het verwacht aantal producten in backorder. Dit wordt weergegeven door:

$$\int_a^b max(0, \min[(x-\mathrm{s}), \mathrm{q}])f(x)dx$$

Voor de bepaling van de boven- en ondergrens wordt de methode uit De Vylder, Goovaerts en De Pril (1982) gebruikt. Dit is gebaseerd op een situatie uit de verzekeringswiskunde waarbij de herverzekeraar aansprakelijk is vanaf het moment dat het risico een bepaald niveau y_1 overschrijdt en het risico beperkt wordt tot een bepaald level y_2 zelfs in het geval dat het risico X dit niveau y_2 overschrijdt. Dit kan weergegeven worden door:

$$y(x) = 0 \ \ als\ x \leq y_1$$
$$y(x) = (x - y_1) als\ y_1 \leq x \leq y_2$$
$$y(x) = (y_2 - y_1)\ als\ y_2 < x$$

Deze redenering is toepasbaar op service-maatstaf drie waarbij y_1 overeenstemt met het bestelpunt s en y_2 overeenstemt met de bestelhoeveelheid q.

Het resultaat hiervan is terug te vinden in *tabellen 4.9* en *4.10* in *bijlage vier*. *Tabellen 4.9* en *4.10* geven respectievelijk de boven- en ondergrens voor het verwachte aantal tekort in backorders in een bestelperiode indien het bestelpunt gelijk is aan s. In tegenstelling tot bij de vorige twee service-maatstaven is hier geen bepaling voor het optimale voorraadniveau gegeven een bepaald vooropgesteld serviceniveau.

Eén mogelijke oplossing wordt nu geïllustreerd aan de hand van een voorbeeld. Herneem de gegevens uit sectie *4.1.1* met $b = 70$, $m_1 = 20$ en $m_2 = 600$. Uit deze gegevens kan de waarde voor σ^2 berekend worden namelijk $\sigma^2 = 200 = (m_2 - {m_1}^2)$. Als het bedrijf bij het begin van de levertijd 30 producten in voorraad heeft, kan de boven- en ondergrens voor het verwachte aantal in backorder in een bestelperiode berekend worden volgens de formules in *tabellen 4.9* en *4.10*. Hierbij wordt de bestelhoeveelheid q vastgelegd op 45 eenheden. Dit resulteert, voor de bovengrens, dat de gegevens aan geval 2 voldoen en meer specifiek voorwaarde twee waardoor de bovengrens gelijk is aan:

$$(q-s)\frac{\sigma^2}{\sigma^2+(m_1-q)^2} = (45-30) * \left(\frac{200}{200+(20-45)^2}\right) = 3.63$$

Dit resulteert in een serviceniveau S_3 van:

$$S_3 = 1 - \frac{\int_a^b max(0, \min[(x-\mathrm{s}), \mathrm{q}]f(x)dx}{q} = 1 - \frac{3.63}{45} = 92\%$$

De ondergrens kan bekomen worden door de formule:

$$(q-s)\frac{\sigma^2+(m_1-a)(m_1-s)}{(b-a)(b-s)} = (45-30) * \frac{200+(20-0)*(20-30)}{(70-0)*(70-30)} = 0$$

Dit resulteert in een serviceniveau S_3 van 100%.

De resultaten kunnen geïnterpreteerd worden waarbij in dit geval, aangezien de formules in *tabellen 4.9* en *4.10* de waardes voor het verwachte aantal producten in backorders in een bestelperiode weergeeft, de bovengrens overeenkomt met het meest pessimistische scenario waarbij het maximale tekort in backorder in een bestelperiode 3.63 eenheden kan bedragen. De ondergrens of het meest optimistische scenario geeft aan dat geen producten als backorder geleverd zouden moeten worden.

4.1.4. Bepalen boven- en ondergrens service-maatstaf vier

De vierde en laatste maatstaf S_4 is de kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval $[t_1, t_2]$ voorvalt in een bestelperiode. In tegenstelling tot de overige drie maatstaven heeft deze maatstaf geen fysieke betekenis. De economische relevantie van deze maatstaf is aangetoond in *sectie 3.4*. Dit wordt weergegeven door:

$$\int_a^b 1_{t_1 \le x_i \le t_2} f(x) dx$$

Voor de berekening van de boven- en ondergrens wordt gebruikt gemaakt van het concept van tweepunts-verdelingen.

Het resultaat hiervan is terug te vinden in *tabellen 4.11* en *4.12* in *bijlage vijf*. *Tabellen 4.11* en *4.12* geven respectievelijk de boven- en ondergrens voor de kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval voorvalt in een bestelperiode indien het bestelpunt gelijk is aan s. In tegenstelling tot bij de vorige service-maatstaven gebeurt de bepaling van de grenzen zonder de opname van het tweede moment. Dit komt doordat nauwelijks onderzoek is verricht naar deze service-maatstaf en momenteel enkel een analytisch resultaat voor de grenzen bekomen kan worden met de kennis van enkel het eerste moment.

Het gebruik van de boven- en ondergrens wordt nu geïllustreerd aan de hand van een voorbeeld. Herneem de gegevens uit sectie *4.1.1* met $b = 70$ en $m_1 = 20$. De beslissingsnemer is geïnteresseerd in de kans dat de vraag tussen 30 en 50 eenheden ligt. Herinner uit sectie *3.4* wat een mogelijke betekenis van dit interval kan zijn. Zo kunnen de grenswaardes voor het interval overeenkomen met de punten waarvoor een vooropgestelde winst bereikt wordt. Veronderstel in dit voorbeeld dat uit een kostenfunctie blijkt dat de vooropgestelde winst behaald wordt indien de vraag tussen 30 en 50 eenheden ligt. Wat is nu de kans dat dit voorvalt?

Voor de bovengrens geldt de voorwaarde

$$m_1 < t_1 \ (20 < 30)$$

zodat de waarde voor de bovengrens bekomen kan worden door

$$\frac{m_1}{t_1}$$

wat overeenstemt met een kans van 67%. De bovengrens komt hier overeen met het best mogelijke scenario waarin de kans 67% is dat de vraag tussen 30 en 50 eenheden ligt waardoor de vooropgestelde winst bereikt wordt.

Voor de ondergrens geldt dezelfde voorwaarde

$m_1 < t_1$

wat resulteert in een waarde voor de ondergrens gelijk aan 0. Dit komt overeen met het slechts mogelijke scenario waarbij de kans gelijk is aan 0 dat de vooropgestelde winst behaald wordt.

In de vorige secties zijn de methodes voor de analytische bepaling van de boven- en ondergrens voor elk van de vier service-maatstaven uitgewerkt. Verscheidene analytische resultaten voor diverse types van informatie zijn gekend. Doch hebben de analytische methoden hun beperkingen. Daarom wordt een alternatieve aanpak voorgesteld.

4.2. De bepaling van het bestelpunt met behulp van lineaire programmering

In *sectie 4.1* werd de boven- en ondergrens voor het bestelpunt op analytische wijze bepaald afhankelijk van de informatie die beschikbaar was. In dit deel wordt een tweede manier voorgesteld om het optimale bestelpunt te bepalen. Het bestelpuunt zal in deze sectie bepaald worden met behulp van lineaire programmering. Bij lineair programmeren wordt getracht een zo nauwkeurig mogelijke benadering te maken van de service-integraal voor de verschillende service-maatstaven uit hoofdstuk drie. Het idee voor de benadering van de service-integraal met behulp van een lineair programma werd voor het eerst geïntroduceerd door Goovaerts, Haezendonck en De Vylder (1982). Zij probeerden de integraal te benaderen door een een groot aantal beperkingen voor het probleem op te leggen en vervolgens het lineair programma op te lossen. Hierop wordt dieper ingegaan later in dit hoofdstuk. In deze sectie wordt, voor elk van de vier service-maatstaven, een lineair programmeringsmodel opgebouwd om het bestelpunt te berekenen gegeven een bepaald serviceniveau. Hierbij wordt verondersteld dat volgende informatie gekend is: het bereik, het eerste moment en het tweede moment van de verdeling van de vraag tijdens de levertijd.

4.2.1. Lineair programma voor service-maatstaf één

Zoals eerder vermeld, wordt het verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode weergegeven door volgende formule:

$$\int_a^b (x-s)_+ f(x)dx. \tag{4.1}$$

Als per bestelperiode een vaste hoeveelheid q besteld wordt, is de waarde voor de eerste service-maatstaf, de fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt, gelijk aan

$$S_1 = \left(1 - \frac{\int_a^b (x-s)_+ f(x)dx}{q}\right) \tag{4.2}$$

waarbij $\frac{\int_a^b (x-s)_+ f(x)dx}{q}$ de fractie van het aantal producten dat niet op tijd geleverd wordt voorstelt.

Om dit probleem op te lossen moeten de volgende grenzen bepaald worden:

$$\underset{F \in \emptyset}{bov} \int_0^\infty (x-s)_+ dF(x) \tag{4.3a}$$

$$\underset{F \in \emptyset}{\text{ond}} \int_0^\infty (x-s)_+ dF(x) \tag{4.3b}$$

Hierbij is $\emptyset$ de verzameling voor alle verdelingen F gedefinieerd op het domein $\mathbb{R}^+$ die hetzelfde eerst moment $m_1 = E(X)$ en tweede moment $m_2 = E(X^2)$ hebben.

Hierbij is de variantie $\sigma^2 = m_2 - m_1{}^2$ (4.4)

In *sectie 4.1.1* werd reeds aangehaald hoe deze grenzen analytisch gevonden konden worden. In Janssens en Ramaekers (2008) wordt een oplossing voorgesteld, gebaseerd op het idee van Goovaerts, Haezendonck en De Vylder (1982), voor het oplossen van *(4.3a)* en *(4.3b)* door middel van lineaire programmering. Deze oplossing zal hier verder uitgewerkt worden. Eerst wordt het probleem van de bovengrens *(4.3a)* opgelost.

Als de functies $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ kan het primaal probleem voor elke $z' = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ weergegeven worden door *(4.5)*.

$$P(z') = \underset{F \in \emptyset}{bov} \left\{ \int_0^\infty (x-s)_+ dF(x) \,\middle|\, I(F) \right\} \tag{4.5}$$

met $I(F)$ een set van integraal beperkingen van de vorm:

$\int f_i(x) dF(x) = z_i \ (i = 1, \ldots, n-1)$ en $f_n = (x-s)_+$ (4.6)

In dit geval zijn de beperkingen het eerste en tweede moment. Een bijkomende beperking wordt ingevoegd aangezien F een cumulatieve kansverdelingsfunctie voorstelt. Dit geeft in totaal de volgende 3 beperkingen:

$$\int dF(x) = 1, \ \int x dF(x) = m_1, \int x^2 dF(x) = m_2 \tag{4.7}$$

Concreet betekent dit een probleem met drie beperkingen waarbij

$f_1(x) = 1$	$f_4(x) = (x-s)_+$
$f_2(x) = x$	$z_1 = m_1$
$f_3(x) = x^2$	$z_2 = m_2$

Zoals eerder vermeld kan een benadering gemaakt worden van de integraal uit het primaal probleem. Hierbij worden de integralen vervangen door een sommatie. In plaats van de doelfunctie te evalueren over een continu interval, worden de functies hierdoor geëvalueerd over een discreet aantal punten x_i. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de discrete massa of kans p_i van deze punten. De oplossing voor het continu interval kan bekomen worden door het aantal punten dat geëvalueerd wordt te verhogen naar oneindig. Het aantal punten dat geëvalueerd wordt, wordt weergegeven door k'. Het primaal optimalisatieprobleem is door deze benadering gelijk aan:

$$Max \sum_i ((x_i - s)_+) * p_i \tag{4.8}$$

beperkt tot:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{4.9}$$

$$\sum_i x_i * p_i = m_1 \tag{4.10}$$

$$\sum_i {x_i}^2 * p_i = m_2 \tag{4.11}$$

met $p_i \geq 0, 0 \leq x_i \leq b$

waarbij

x_i = Het i^{de} evaluatiepunt met $x_i = i * \frac{b}{k'}$, $i = 0, \dots, k'$
b = De bovengrens van het interval van de vraag
s = Het bestelpunt
p_i = De massa in het punt x_i
m_1 = Het eerste moment (=de verwachte waarde)
m_2 = Het tweede moment

Dit primaal probleem heeft ook een duaal probleem. De relatie tussen het primaal probleem en het duaal probleem is vaak nuttig gebleken. Een voorbeeld hiervan zijn schaduwprijzen. Schaduwprijzen kunnen gebruikt worden voor post–optimale analyse. Schaduwprijzen zijn het gevolg van de uitwerking van een duaal probleem met bepaalde eigenschappen. Schaduwprijzen geven weer hoe de winst verandert indien een bedrijf extra middelen beschikbaar stelt.

De transformatie van een primaal probleem naar een duaal probleem gebeurt volgens bepaalde regels waarbij de parameters van het probleem dezelfde blijven, maar ze enkel op andere plaatsen ingevuld worden. Het duaal probleem kan weergegeven worden door *(4.12)*. Hierbij zijn alle $y = (y_1 + y_2 + y_3) \in \mathbb{R}^3$ en moeten ze voldoen aan de beperkingen weergegeven achter de verticale streep. De functies $\widehat{f_i}(\theta)(i = 1,2, \dots, n)$ in *(4.12)* worden gedefinieerd in *(4.13)*. H_θ staat hierbij voor de verzameling van functies met de bepaalde verdeling die onderzocht wordt in het probleem.

$$Q(z') = \inf\{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 | y_1 \widehat{f_1}(\theta) + y_2 \widehat{f_2}(\theta) + y_3 \geq \widehat{f_3}(\theta)\}, (\theta \in J) \tag{4.12}$$

$$\widehat{f_i}(\theta) = \int f_i \, dH_\theta(x) \text{ en } \theta \in J \tag{4.13}$$

In deze masterproef worden de verdelingen, gedefinieerd op een eindig interval $[0, b]$ met $b > 0$ onderzocht. Als dit toegepast wordt, geeft dit dat $H_\theta(x) = 1$ uit indien $x \geq \theta$ met $(0 \leq \theta \leq b)$. Concreet geeft dit:

$$\widehat{f_1}(\theta) = \theta, (0 \leq \theta \leq b) \tag{4.14}$$

$$\widehat{f_2}(\theta) = \theta^2, (0 \leq \theta \leq b) \tag{4.15}$$

$$\widehat{f_3}(\theta) = (\theta_i - s)_+, (0 \leq \theta_i \leq b) \tag{4.16}$$

Zoals eerder bij het primaal probleem wordt een benadering gemaakt om *(4.12)* uit te werken. Dit geeft volgend optimalisatieprobleem Q^A:

$$Q^A(z') = \underset{y \in \mathbb{R}^3}{ond}\{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 | y_1\theta + y_2\theta^2 + y_3 \geq (\theta_i - s)_+\}, (\theta_i = i * \frac{b}{k'}, i = 0, \dots, k') \tag{4.17}$$

wat resulteert in het overeenkomstig duaal probleem:

$$Min \sum_{j=1}^{2} y_i m_i + y_3 * 1 \tag{4.18}$$

beperkt tot:

$$y_1\widehat{f_1}(x_i) + y_2\widehat{f_2}(x_i) + y_3 \geq \widehat{f_3}(x_i) \text{ en } (x_i = i * \frac{b}{k'}, i = 0, \dots, k') \tag{4.19}$$

waarbij

$$\widehat{f_1}(x_i) = x_i \tag{4.20}$$

$$\widehat{f_2}(x_i) = {x_i}^2 \tag{4.21}$$

$$\widehat{f_3}(x_i) = (x_i - s)_+ \tag{4.22}$$

$$y_j\ (j = 1,2,3) = onbegrensd \tag{4.23}$$

Op deze wijze kan de bovengrens van het aantal producten tekort, gegeven een vooropgesteld bestelpunt, bepaald worden. Het berekenen van de ondergrens gebeurt op dezelfde manier. Het enige verschil is dat in het primaal optimalisatieprobleem *(4.8)* de maximalisatie vervangen wordt door de minimalisatie en in het duaal probleem *(4.18)* de minimalisatie vervangen wordt door de maximalisatie. De reden waarom de grenzen bepaald worden aan de hand van een duaal probleem is het volgende. In het duaal probleem blijft de doelfunctie voor het probleem steeds hetzelfde. De doelfunctie bestaat namelijk uit constanten (het eerste moment, …). Het voordeel hiervan is dat indien de variabele van het model verandert (=de waarde bestelpunt), dit geen invloed heeft op de doelfunctie die geoptimaliseerd moet worden maar een invloed op de beperkingen van het probleem. Dit is niet het geval bij het primaal probleem waar de waarde van het bestelpunt zich in de doelfunctie bevindt. Dit wil zeggen dat indien de waarde van het bestelpunt verandert wordt, de doelfunctie die geoptimaliseerd wordt ook mee verandert. Dit creëert een situatie waarbij twee verschillende doelfuncties geoptimaliseerd worden aan de hand van dezelfde beperkingen. Dit is niet handig aangezien er in principe twee verschillende zaken met elkaar vergeleken worden.

Vanuit het perspectief van het bedrijf is het niet nuttig om gegeven een bepaald bestelpunt, een resultaat te krijgen voor het verwachte aantal producten tekort. De omgekeerde situatie is meer waardevol. Daarom wordt nu een lineair programma uitgewerkt dat, gegeven het verwachte aantal producten tekort dat een bedrijf wil hebben, het bestelpunt bepaald wordt dat hieraan voldoet.

Het optimalisatieprobleem wordt geformuleerd als:

$$Min\, s \tag{4.24}$$

beperkt tot:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{4.25}$$

$$\sum_i x_i * p_i = m_1 \tag{4.26}$$

$$\sum_i {x_i}^2 * p_i = m_2 \tag{4.27}$$

$$\sum_i ((x_i - s)_+) * p_i \leq m_3 \tag{4.28}$$

waarbij

x_i = Het i^{de} evaluatiepunt met $x_i = i * \frac{b}{k'}$, $i = 0, \dots, k'$
s = Het bestelpunt
p_i = De massa in het punt x_i
m_1 = Het eerste moment (=de verwachte waarde)
m_2 = Het tweede moment
m_3 = Het maximaal verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode

Net zoals hiervoor werden dezelfde stappen toegepast om het primaal probleem (*4.8)* om te vormen naar zijn duale vorm waarbij het optimalisatieprobleem bekomen wordt door het idee voortgebracht in Goovaerts, Haezendonck en De Vylder (1982) toe te passen. De niet-lineaire beperking *(4.28)* kan benaderd worden door de waarde van s te laten samenvallen met één van de evaluatiepunten. Dit zorgt ervoor dat indien het aantal evaluatiepunten naar oneindig verhoogd wordt, de benadering het correcte resultaat geeft. Hierdoor wordt deze beperking gelineariseerd. Om dit te bewerkstellen moeten enkele aanpassingen gebeuren namelijk (Janssens, Ramaekers en Verdonck, 2013):

Een binaire variabele y_j moet gecreëerd worden die aangeeft welk evaluatiepunt als bestelpunt gebruikt wordt. Dit komt overeen met:

$$\begin{Bmatrix} y_j = 1\; als\; s = x_j \\ y_j = 0\; als\; s \neq x_j \end{Bmatrix} \tag{4.29}$$

Aangezien het bestelpunt s slechts met één waarde kan samenvallen volgt de bijkomende beperking:

$$\sum_{j=1}^{k'} y_j = 1 \tag{4.30}$$

Vervolgens wordt de variabele y in het model geïntroduceerd wat leidt tot:

$$\sum_{i=1}^{k'} p_i * (x_i - s)_+ \leq m_3 * y_j + m_1(1 - y_j) \tag{4.31}$$

Tenslotte moet de ook de link gelegd worden tussen s en de waarde van x waarmee s samenvalt:

$$s \geq x_j * y_j \quad \forall j \tag{4.32}$$

Het optimalisatieprobleem waarbij s samenvalt met één van de evaluatiepunten wordt weergegeven door:

$$Min\, s \tag{4.33}$$

beperkt tot:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{4.34}$$

$$\sum_i x_i * p_i = m_1 \tag{4.35}$$

$$\sum_i {x_i}^2 * p_i = m_2 \tag{4.36}$$

$$\sum_{j=1}^{k'} y_j = 1 \tag{4.37}$$

$$s \geq x_j * y_j \ \ \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{4.38}$$

$$\sum_{i=1}^{k'} p_i * (x_i - s)_+ \ \leq \ m_3 * y_j + m_1\big(1 - y_j\big) \ \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{4.39}$$

De beperking in *(4.34)* geeft aan dat gewerkt wordt met een discrete kansverdeling waarbij de som van de kansen altijd gelijk moet zijn aan één. De beperkingen *(4.35)* en *(4.36)* zorgen ervoor dat enkel de verdelingen beschouwd worden waarbij de eigenschappen overeenkomen met het vooropgestelde eerste en tweede moment (m_1, m_2). De beperking in *(4.37)* dient om te zorgen dat het bestelpunt s maar met één waarde kan samenvallen en *(4.38)* maakt de link tussen s en de waarde van x waarmee s samenvalt. De beperking in *(4.39)* tenslotte zorgt ervoor dat het vooropgestelde niveau van het verwachte aantal producten dat direct uit voorraad geleverd kan worden in een bestelperiode niet overschreden wordt. Hierbij is het logisch dat de oplossing van het optimalisatieprobleem nauwkeuriger wordt indien meer evaluatiepunten gebruikt worden. Dit resulteert immers uit het feit dat indien het aantal evaluatiepunten toeneemt, het optimalisatieprobleem nauwer gedefinieerd wordt door het toenemende aantal beperkingen waaraan de oplossing van het probleem moet voldoen en er meer mogelijke waardes zijn waarmee het bestelpunt kan samenvallen.

Voor de oplossing van het minimalisatieprobleem dient enkel in *(4.24)* en *(4.33)* “Min” veranderd te worden in “Max” en de beperkingen blijven dezelfde.

Het gebruik van dit lineair programma wordt nu verduidelijkt aan de hand van een voorbeeld. In *bijlage zes* staat een voorbeeld van een uitgeschreven model voor de bepaling van het bestelpunt (bovengrens). In dit voorbeeld is geopteerd voor een oplossing met 10 evaluatiepunten om het model overzichtelijk te houden.

De gegevens voor het model zijn de volgende:

- Interval $[a, b] = [0{,}50]$
- Eerste moment $m_1 = 30$ en tweede moment $m_2 = 925$
- Het maximum verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode $m_3 = 5$

Het resultaat wordt bekomen door gebruik te maken van Lingo 15.0. Dit is een optimalisatiesoftware voor het oplossen van lineaire, niet-lineaire en integere problemen. Het resultaat van dit model is dat, indien het bedrijf een maximum verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode van vijf eenheden vooropstelt, het bestelpunt gelijk moet zijn aan 25. Het resultaat gebruik makend van de analytische formules uit *tabel 4.3* is gelijk aan 26.25 eenheden. Dit verschil in resultaat is een mooi voorbeeld van het verschil tussen de methode van lineair programmeren en het analytisch berekenen van de oplossing. Herinner dat bij de methode van lineair programmering een benadering gemaakt wordt van de integraal waar, bij de analytische wijze, het exacte resultaat van de integraal berekend wordt. Het nadeel van analytisch berekenen is echter dat het soms zeer veel en zeer ingewikkeld werk vergt om tot een oplossing te komen en ook niet altijd een analytische oplossing bekomen kan worden. Hierin ligt het voordeel van lineair programmeren. Het is veel handiger om een resultaat te bekomen en de uitkomst benadert die van het analytisch resultaat. Het verschil in resultaat in dit voorbeeld is te wijten aan het lage aantal evaluatiepunten. Dit werd gedaan om de overzichtelijkheid van het uitgeschreven model te garanderen. Bij verder onderzoek zal het aantal evaluatiepunten naar een adequaat niveau verhoogd worden.

4.2.2. Lineair programma voor service–maatstaf twee

De tweede service-maatstaf is de verwachte kans op geen tekort in een bestelperiode. Voor de uitwerking van het lineair programma wordt dezelfde werkwijze toegepast als bij service-maatstaf één. Dit resulteert in het volgende optimalisatieprobleem voor het geval dat s samenvalt met één van de evaluatiepunten (Janssens, Ramaekers en Verdonck, 2013):

$$Min\ s \tag{4.40}$$

beperkt tot:

$$\textstyle\sum_i p_i = 1 \tag{4.41}$$

$$\textstyle\sum_i x_i * p_i = m_1 \tag{4.42}$$

$$\textstyle\sum_i {x_i}^2 * p_i = m_2 \tag{4.43}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{k'} y_j = 1 \tag{4.44}$$

$$s \geq x_j * y_j \quad \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{4.45}$$

$\sum_{i=1}^{k'} p_i * 1_{[x_j, x_i]} \leq m_4 * y_j + (1 - y_j) \ \forall \ j = 1, \dots, k'$ (4.46)

waarbij

x_i = Het i^{de} evaluatiepunt met $x_i = i * \frac{b}{k'}$, $i = 0, \dots, k'$

s = Het bestelpunt

p_i = De massa in het punt x_i

m_1 = Het eerste moment (=de verwachte waarde)

m_2 = Het tweede moment

m_4 = De maximale verwachte kans op een tekort in een bestelperiode

De beperkingen *(4.41)–(4.45)* zijn dezelfde als in het optimalisatieprobleem voor service-maatstaf één. Beperking *(4.46)* incorporeert de vooropgestelde waarde van de maximale verwachte kans op een tekort in een bestelperiode.

Voor de oplossing van het minimalisatieprobleem dient enkel in *(4.40)* "Min" veranderd te worden in "Max" en de beperkingen blijven dezelfde.

Het gebruik van dit lineair programma wordt nu verduidelijkt aan de hand van een voorbeeld. In *bijlage zeven* staat een voorbeeld van een uitgeschreven model voor het bepalen van het bestelpunt (bovengrens). In dit voorbeeld is geopteerd voor een oplossing met 10 evaluatiepunten om het model overzichtelijk te houden. De gegevens voor het model zijn de volgende:

- Interval $[a, b] = [0{,}50]$
- Eerste moment $m_1 = 30$ en tweede moment $m_2 = 925$
- De kans op een tekort in een bestelperiode $m_4 = 15\%$

Het resultaat van dit model is dat, indien een maximale verwachte kans van 15 procent op een tekort in een bestelperiode vooropstelt wordt, het bestelpunt 30 eenheden moet bedragen.

4.2.3. Lineair programma voor service-maatstaf drie

De derde service-maatstaf is de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode. Voor de uitwerking van het lineair programma wordt dezelfde werkwijze toegepast als bij de vorige service-maatstaven. Dit resulteert in het volgende optimalisatieprobleem voor het geval dat s samenvalt met één van de evaluatiepunten:

$Min\ s$ (4.47)

beperkt tot:

$\sum_i p_i = 1$ (4.48)

$\sum_i x_i * p_i = m_1$ (4.49)

$$\sum_i x_i^2 * p_i = m_2 \quad (4.50)$$

$$\sum_{j=1}^{k'} y_j = 1 \quad (4.51)$$

$$s \geq x_j * y_j \;\; \forall\, j = 1, \dots, k' \quad (4.52)$$

$$\sum_{i=1}^{k'} p_i * (x_i - s)_+ \;\leq\; m_5 * y_j + m_1(1 - y_j) \forall\, j = 1, \dots, k' \quad (4.53)$$

waarbij

x_i = Het i^{de} evaluatiepunt met $x_i = i * \frac{b}{k'}$, $i = 0, \dots, k'$
s = Het bestelpunt
p_i = De massa in het punt x_i
m_1 = Het eerste moment (=de verwachte waarde)
m_2 = Het tweede moment
m_5 = Het maximale verwachte aantal tekort in backorders in een bestelperiode
q = De bestelhoeveelheid

De beperkingen *(4.48)–(4.52)* zijn dezelfde als in het optimalisatieprobleem voor maatstaf één. Beperking *(4.53)* incorporeert het vooropgestelde doel voor het maximale verwachte aantal tekort in backorders in een bestelperiode.

Voor de oplossing van het minimalisatieprobleem dient enkel in *(4.47)* "Min" veranderd te worden in "Max" en de beperkingen blijven dezelfde.

Het gebruik van dit lineair programma wordt nu verduidelijkt aan de hand van een voorbeeld. In bijlage acht staat een voorbeeld van een uitgeschreven model voor het bepalen van de optimale veiligheidsvoorraad (bovengrens). In dit voorbeeld is geopteerd voor een oplossing met 10 evaluatiepunten om het model overzichtelijk te houden. De gegevens voor het model zijn de volgende:

- Interval $[a, b] = [0,50]$
- Eerste moment $m_1 = 30$ en tweede moment $m_2 = 925$
- Het verwachte aantal tekort in backorders $m_5 = 10$
- Aantal evaluatiepunten $k' = 10$
- Bestelhoeveelheid $q = 40$

Het resultaat van dit model is dat, indien het maximale verwachte aantal producten tekort in backorders in een bestelperiode van 10 eenheden vooropstelt wordt, het bestelpunt 20 eenheden moet bedragen

4.2.4. Lineair programma voor service–maatstaf vier

De vierde service-maatstaf is de kans op een gebeurtenis dat de vraag met grootte gelegen in een bepaald interval $[t_1, t_2]$ voorvalt in een bestelperiode. De grootte van het interval wordt bepaald door de grenswaarden t_1 en t_2. Bij de uitwerking van het lineair programma wordt dezelfde werkwijze toegepast als bij de vorige service-maatstaven. Dit resulteert in het volgende optimalisatieprobleem voor het geval dat s samenvalt met één van de evaluatiepunten:

$$Max \sum_i p_i * 1_{\{t_1 \le x_i \le t_2\}} \tag{4.54}$$

beperkt tot:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{4.55}$$

$$\sum_i x_i * p_i = m_1 \tag{4.56}$$

$$\sum_i x_i^2 * p_i = m_2 \tag{4.57}$$

waarbij

x_i = Het i^{de} evaluatiepunt met $x_i = i * \frac{b}{k'}$, $i = 0, \dots, k'$
s = Het bestelpunt
p_i = De massa in het punt x_i
m_1 = Het eerste moment (=de verwachte waarde)
m_2 = Het tweede moment
t_1, t_2 = Grens 1 en grens 2 met $a \le t_1 \le t_2 \le b$

De beperkingen *(4.55)–(4.57)* zijn dezelfde als in het optimalisatieprobleem voor maatstaf één.

Voor de oplossing van het minimalisatieprobleem dient enkel in *(4.54)* "Min" veranderd te worden in "Max" en de beperkingen blijven dezelfde.

Het gebruik van dit lineair programma wordt nu verduidelijkt aan de hand van een voorbeeld. In bijlage negen staat een voorbeeld van een uitgeschreven model voor het bepalen van de optimale kans (bovengrens). In dit voorbeeld is geopteerd voor een oplossing met 10 evaluatiepunten om het model overzichtelijk te houden. De gegevens voor het model zijn de volgende:

- Interval $[a, b] = [0,50]$
- Eerste moment $m_1 = 30$ en tweede moment $m_2 = 925$
- Het verwachte aantal tekort in backorders $m_6 = 10$
- Aantal evaluatiepunten $k' = 10$
- De ondergrens $t_1 = 10$ en de bovengrens $t_2 = 20$

Het resultaat van dit model is dat de maximale kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een interval $[10,20]$ voorvalt gelijk is aan 17 procent.

5. Onderzoek

In dit hoofdstuk worden enkele situaties onderzocht om de invloed hiervan op het bestelpunt te onderzoeken. Dit hoofdstuk focust op de bepaling van het bestelpunt via lineaire programmering. Zoals eerder vermeld zijn analytische berekeningen zeer nuttig voor het oplossen van voorraadproblemen. Ze geven een exact resultaat van de oplossing in tegenstelling tot lineaire programmering waar een benadering gemaakt wordt. Het probleem met het bepalen van het bestelpunt op analytische wijze is echter dat een oplossing niet altijd bekomen kan worden. Dit is te wijten aan het feit dat sommige problemen niet op analytische wijze opgelost kunnen worden of hierover in de literatuur nog geen onderzoek naar is verricht. Bovendien is het gebruik van deze methode zeer ingewikkeld en tijdrovend. De sterkte van lineaire programmering bestaat erin dat veel van deze problemen wel eenvoudig op te lossen zijn met behulp van een lineair programma. De verschillende experimenten die in het vervolg van dit hoofdstuk behandeld zullen worden, zijn moeilijk of helemaal niet te bekomen op analytische wijze maar zijn wel oplosbaar met behulp van lineaire programmering.

In deze masterproef zullen drie gevallen onderzocht worden. De eerste situatie betreft het gebruik van een bepaald criterium voor de bepaling van het bestelpunt. Het bestelpunt wordt meestal bepaald aan de hand van een vooropgesteld serviceniveau voor één bepaalde service-maatstaf. In het eerste onderzoek wordt het effect op het bestelpunt onderzocht indien het bestelpunt bepaald wordt aan de hand van meerdere service-maatstaven tegelijkertijd.

Het tweede geval dat onderzocht zal worden is het effect op het bestelpunt indien gekend is dat de verdeling unimodaal is. Hierbij wordt een lineair programma ontwikkelt voor de bepaling van het bestelpunt in het geval dat de unieke modus van de verdeling gekend is. Verder worden ook nog enkele sensitiviteitsanalyses uitgevoerd om het effect van de kennis van de unieke modus te onderzoeken.

Het derde geval betreft de relatie tussen de voorraadkosten en het bestelpunt. Deze situatie heeft betrekking op service-maatstaf drie, het verwachte aantal tekort in backorders in een bestelperiode. In het geval van deze maatstaf moet een waarde gevonden worden voor twee beslissingsvariabelen, namelijk de bestelhoeveelheid q en het bestelpunt s. Door de opbouw van het lineair programma kan de oplossing voor dit probleem enkel bepaald worden indien de waarde voor één van de twee beslissingsvariabelen vooraf gekend is. Tot hiertoe is de bestelhoeveelheid telkens als een gegeven gebruikt zonder hierbij rekening te houden hoe de bestelhoeveelheid een invloed kan hebben op het bestelpunt en vice-versa. Daarom zal de relatie tussen deze twee elementen in dit deel verder onderzocht worden.

5.1. Onderzoek 1: De combinatie van verschillende maatstaven

In dit deel wordt het effect op het bestelpunt onderzocht indien meer dan één service-maatstaf tegelijk gebruikt wordt bij de bepaling van het bestelpunt. De bepaling van het bestelpunt wordt nu meestal gedaan aan de hand van één service-maatstaf. Het is misschien voordeliger voor een bedrijf indien het bestelpunt bepaald wordt aan de hand van meerdere service-maatstaven tegelijkertijd? Een andere reden voor het gebruik van meerdere service-maatstaven tegelijkertijd bij de bepaling van het bestelpunt zou kunnen zijn dat het bedrijf richtlijnen vooropstelt voor meerdere service-maatstaven waaraan tegelijk voldaan dient te worden. In deze masterproef komen vier service-maatstaven aan bod. Theoretisch kunnen zes mogelijke combinaties onderzocht worden waarbij twee service-maatstaven tegelijk gebruikt worden. Niet alle combinaties zijn echter mogelijk. Zo kan maatstaf vier niet gecombineerd worden met één van de drie andere service-maatstaven. Maatstaf vier geeft namelijk de maximale kans dat een vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval voorvalt in een bestelperiode. Dit komt eigenlijk overeen met een "best-case scenario" waarbij we deze kans willen maximaliseren. Bij de drie andere maatstaven ligt de focus op de bepaling van het bestelpunt zodat aan een bepaald serviceniveau voldaan wordt. De combinatie van maatstaf vier samen met één van de andere drie maatstaven zou dus geen logische resultaten opleveren. Een andere onmogelijke combinatie is die van maatstaf één met maatstaf drie. Deze twee maatstaven hebben dezelfde focus namelijk, het aantal producten tekort in een bestelperiode. Het verschil tussen deze twee maatstaven ligt in de respons op dit gegeven. Waar bij maatstaf één het aantal producten tekort behandeld wordt als verloren verkopen, wordt dit tekort bij maatstaf drie behandeld als producten in backorders. Aangezien beide maatstaven eigenlijk hetzelfde onderzoeken wordt deze combinatie ook niet overwogen. Dit resulteert uiteindelijk in twee mogelijke combinaties die onderzocht zullen worden. Als eerste wordt de combinatie van maatstaf één met maatstaf twee onderzocht en vervolgens wordt de combinatie van maatstaf twee met maatstaf onderzocht.

5.1.1. Combinatie service-maatstaf één en twee

Tot hiertoe is de bepaling van het bestelpunt gebeurd zodat aan het vooropgesteld serviceniveau van één service-maatstaf voldaan werd. Dit kon gedaan worden aan de hand van analytische formules of met gebruik van een lineair programma. In dit deel wordt aan de hand van lineair programmeren onderzocht of het voordelig kan zijn om het bestelpunt te bepalen aan de hand van meerdere service-maatstaven. De twee service-maatstaven die in dit deel gecombineerd worden zijn maatstaf 1, de fractie van verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in een bestelperiode en maatstaf 2, de kans op geen tekort in een bestelperiode. Het onderzoek om het effect op het bestelpunt te analyseren indien meerdere service-maatstaven tegelijk gebruikt worden verloopt als volgt:

Als eerste wordt bepaald welke situaties onderzocht zullen worden. Hiervoor is gekozen om per service-maatstaf vijf verschillende waardes te onderzoeken. Voor maatstaf één worden, voor het verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode, respectievelijk de waardes 3, 5, 8, 10 en

15 gekozen. De waardes voor de kans op een tekort in een bestelperiode zijn respectievelijk 5%, 10%, 20%, 35% en 50%. Dit resulteert, als de waardes van beide maatstaven gecombineerd worden, in 25 combinaties. Een overzicht hiervan wordt gegeven in *tabel 5.1*. De getallen in de rij "maatstaf 1 en 2" komen overeen met de combinatie van de maatstaven in de 2 rijen erboven. Zo verwijst "01" naar de combinatie waarbij maatstaf één een waarde van 3 en maatstaf twee een waarde van 95% aanneemt. In het verdere verloop van dit deel zullen de getallen in deze rij gebruikt worden om te verwijzen naar een bepaalde combinatie.

Na de bepaling van de experimentele situaties, wordt overgegaan op de bepaling van het bestelpunt voor elke situatie. Eerst wordt voor elke maatstaf apart de waarde van het bestelpunt berekend. Dit gebeurt aan de hand van de lineaire programma's die eerder in deze masterproef ontwikkeld zijn. Er wordt verwezen naar sectie *4.2.1* voor het lineair programma van maatstaf één en sectie *4.2.2* voor het lineair programma van maatstaf twee.

Het lineair programma voor de bepaling van het bestelpunt indien voldaan moet zijn aan beide service-maatstaven wordt geformuleerd als:

$$Min\, s \tag{5.1}$$

beperkt tot:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{5.2}$$

$$\sum_i x_i * p_i = m_1 \tag{5.3}$$

$$\sum_i {x_i}^2 * p_i = m_2 \tag{5.4}$$

$$\sum_{j=1}^{k'} y_j = 1 \tag{5.5}$$

$$s \geq x_j * y_j \quad \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.6}$$

$$\sum_{i=1}^{k'} p_i * (x_i - s)_+ \ \leq\ m_3 * y_j + m_1(1 - y_j)\ \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.7}$$

$$\sum_{i=1}^{k'} p_i * 1_{[x_j, x_i]} \leq\ m_4 * y_j + (1 - y_j)\ \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.8}$$

De beperkingen *(5.7)* en *(5.8)* komen overeen met respectievelijk de beperking voor maatstaf één en twee. De overige gegevens voor het model zijn gelijk aan:

- Het interval van de vraag $[a, b] = [0,50]$
- Het eerste moment $m_1 = 30$
- Het tweede moment $m_2 = 925$
- Het aantal evaluatiepunten $k' = 80$

Bij de berekening van het bestelpunt wordt gekozen voor een model met 80 evaluatiepunten. Uit de literatuur blijkt dat dit aantal voldoende groot is om het bestelpunt nauwkeurig genoeg te kunnen bepalen over een interval $[0,50]$ (Janssens et al., 2013).

Tabel 5.1: Gegevens combinatie service-maatstaf één en twee

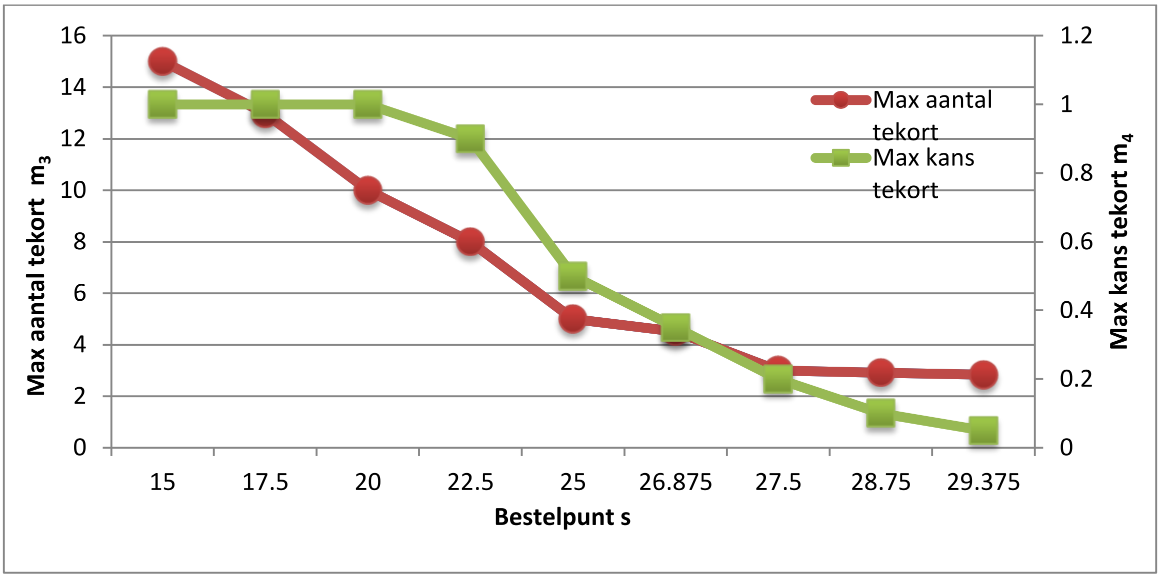
Maatstaf 1 (m_3)	3	3	3	3	3	5	5	5	5
Maatstaf 2 (m_4)	0.05	0.1	0.2	0.35	0.5	0.05	0.1	0.2	0.35
Maatstaf 1 en 2	01	02	03	04	05	06	07	08	09
Maatstaf 1(m_3)	5	8	8	8	8	8	10	10	10
Maatstaf 2 (m_4)	0.5	0.05	0.1	0.2	0.35	0.5	0.05	0.1	0.2
Maatstaf 1 en 2	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Maatstaf 1(m_3)	10	10	15	15	15	15	15	/	/
Maatstaf 2 (m_4)	0.35	0.5	0.05	0.1	0.2	0.35	0.5	/	/
Maatstaf 1 en 2	19	20	21	22	23	24	25	/	/

Tabel 5.2 geeft een overzicht van de uitkomsten voor de experimenten die onderzocht werden. Rechtsonder in de tabel staan de waardes voor het optimale bestelpunt indien slechts één service-maatstaf gebruikt wordt. We merken dat hoe hoger de waarde voor de maatstaven zijn, hoe lager het bestelpunt wordt. Dit is logisch aangezien een hogere waarde voor de maatstaf betekent dat een bedrijf minder strenge regels oplegt inzake een tekort waardoor bijgevolg het bestelpunt minder hoog zal liggen.

De rest van *tabel 5.2* geeft een overzicht van de situaties waarbij maatstaf één en twee gecombineerd werden om het bestelpunt te bepalen. In de rijen van "maatstaf één" en "maatstaf twee" staan de waardes die gebruikt werden voor respectievelijk m_3 en m_4. Het overeenkomstige bestelpunt kan afgelezen worden uit de rij eronder (maatstaf 1 en 2). Deze waarde komt overeen met het bestelpunt indien men aan de vooropgestelde serviceniveaus wil voldoen. De vraag kan nu gesteld worden of het voordeliger is om het bestelpunt te bepalen aan de hand van meerdere service-maatstaven?

Bij de analyse van de resultaten blijkt dat bij de bepaling van het bestelpunt, het combineren van deze twee service-maatstaven geen toegevoegde waarde heeft. Er wordt vastgesteld dat de waardes voor het bestelpunt, indien de twee service-maatstaven tegelijk gebruikt worden, overeenkomen met één van de twee uitkomsten in het geval dat slechts één maatstaf gebruikt werd om het bestelpunt te bepalen. Neem bijvoorbeeld situatie 13 waarbij het verwachte aantal producten tekort (m_3) niet hoger mag zijn als 8 en de verwachte kans op een tekort (m_4) maximaal 20 procent mag bedragen. De uitkomst voor het bestelpunt in dit geval = 27.5 eenheden. Dit komt overeen met de waarde rechtsonder in de tabel indien enkel de verwachte kans op een tekort van 20 procent vooropgesteld wordt. Dit resultaat is te verklaren als volgt. Aangezien het bestelpunt zo bepaald moet worden dat aan beide criteria voldaan wordt, is in de meeste gevallen één van deze twee criteria bindend. Welk criterium bindend is, hangt af van de waardes van de maatstaven. Dit kan weergegeven worden in figuur 2. Deze figuur geeft op de X-as het bestelpunt weer voor een bepaalde waarde van maatstaf één of twee. De linkse Y-as correspondeert met de waardes voor het aantal producten tekort en de rechtse Y-as correspondeert met de maximale kans op een tekort. Het voorbeeld toont dat een bestelpunt van 22.5 eenheden voldoende is als het verwachte aantal tekort <= 8. Maar het bestelpunt is echter niet voldoende hoog om een maximale verwachte kans op een tekort van 20 procent te garanderen. Om hieraan te voldoen moet het bestelpunt = 27.5 eenheden. Bijgevolg is dit criterium, de kans op een tekort, het bindende criterium voor deze situatie waardoor de uitkomst = 27.5 eenheden. In *tabel 5.2* is voor elke situatie die onderzocht is, aangeduid welke van de twee service-maatstaven het bindende criterium is. Bij de waardes die vetgedrukt zijn, is de waarde voor maatstaf één het bindende criterium en in de andere gevallen is maatstaf twee het bindende criterium.

Figuur 2: Optimaal voorraadniveau gebaseerd op het maximum aantal producten tekort in een bestelperiode en de maximale kans op een tekort in een bestelperiode



Tabel 5.2: Output gecombineerd model service-maatstaf één en twee

Maatstaf 1	Maatstaf 2	Maatstaf 1 en 2 gecombineerd	Maatstaf 1	Maatstaf 2	Maatstaf 1 en 2 gecombineerd	
m_3 =3	m_4 =0.05	s =29.375	m_3 =5	m_4 =0.05	s =29.375	
m_3 =3	m_4 =0.1	s =28.75	m_3 =5	m_4 =0.1	s =28.75	
m_3 =3	m_4 =0.2	s =27.5	m_3 =5	m_4 =0.2	s =27.5	
m_3 =3	m_4 =0.35	**s =27.5**	m_3 =5	m_4 =0.35	s =26.875	
m_3 =3	m_4 =0.5	**s =27.5**	m_3 =5	m_4 =0.5	s =25	
Maatstaf 1	Maatstaf 2	Maatstaf 1 en 2 gecombineerd	Maatstaf 1	Maatstaf 2	Maatstaf 1 en 2 gecombineerd	
m_3 =8	m_4 =0.05	s =29.375	m_3 =10	m_4 =0.05	s =29.375	
m_3 =8	m_4 =0.1	s =28.75	m_3 =10	m_4 =0.1	s =28.75	
m_3 =8	m_4 =0.2	s =27.5	m_3 =10	m_4 =0.2	s =27.5	
m_3 =8	m_4 =0.35	s =26.875	m_3 =10	m_4 =0.35	s =26.875	
m_3 =8	m_4 =0.5	s =25	m_3 =10	m_4 =0.5	s =25	
Maatstaf 1	Maatstaf 2	Maatstaf 1 en 2 gecombineerd	Maatstaf 1	Bestelpunt	Maatstaf 2	Bestelpunt
m_3 =15	m_4 =0.05	s =29.375	m_3 =3	s =27.5	m_4 =0.05	s =29.375
m_3 =15	m_4 =0.1	s =28.75	m_3 =5	s =25	m_4 =0.1	s =28.75
m_3 =15	m_4 =0.2	s =27.5	m_3 =8	s =22.5	m_4 =0.2	s =27.5
m_3 =15	m_4 =0.35	s =26.875	m_3 =10	s =20	m_4 =0.35	s =26.875
m_3 =15	m_4 =0.5	s =25	m_3 =15	s =15	m_4 =0.5	s =25

5.1.2. Combinatie service-maatstaf twee en drie

In dit deel wordt het effect op het bestelpunt onderzocht van de combinatie van service-maatstaf twee, de kans op geen tekort in een bestelperiode, met service-maatstaf drie, het verwachte aantal tekort in backorders in een bestelperiode. Hoewel dat service-maatstaf drie ook focust op het aantal producten tekort in een bestelperiode, verschilt deze maatstaf van maatstaf één in het feit dat de producten die tekort zijn onder maatstaf drie als backorder behandeld worden. Het aantal producten tekort bij maatstaf één wordt beschouwd als zijnde verloren verkopen. De behandeling van de tekorten als backorder resulteert ook in een bijkomende beslissingsvariabele waarmee rekening gehouden moet worden, namelijk de bestelhoeveelheid q. Deze waarde is belangrijk aangezien het verwachte aantal producten dat maximaal in backorder aan de klant geleverd kan worden niet hoger mag zijn dan q. Hierbij wordt uitgegaan van de veronderstelling dat de producten in backorder enkel in de eerst opeenvolgende bestelperiode aan de klant geleverd kunnen worden.

Eerst wordt bepaald welke situaties onderzocht zullen worden. Hierbij wordt enerzijds gefocust op de waardes voor de verschillende maatstaven maar anderzijds ook op de waardes van de bestelhoeveelheid. Op deze manier kan mede het effect van de bestelhoeveelheid op het bestelpunt onderzocht worden. *Tabel 5.3* geeft een overzicht van de scenario's die onderzocht zullen worden. Dit overzicht kan opgesplitst worden in drie situaties waarbij de waarde van de bestelhoeveelheid verschilt. Voor elke situatie worden verschillende waardes van de service-maatstaven onderzocht. De bestelhoeveelheid q varieert tussen de waardes 25, 35 en 45. Voor maatstaf twee worden vier verschillende waardes onderzocht, namelijk 65%, 75%, 90% en 95% kans op een tekort in een bestelperiode. Maatstaf drie neemt ook vier waardes aan met respectievelijk 15, 25, 35 en 40 producten tekort in backorder in een bestelperiode. De overige gegevens voor het model zijn de volgende:

- Het interval van de vraag $[a, b] = [0,100]$
- Het eerste moment $m_1 = 50$
- Het tweede moment $m_2 = 2600$
- Het aantal evaluatiepunten $k' = 130$

Vooraleer overgegaan wordt naar de uitwerking van de verschillende scenario's wil ik eerst nog wat meer uitleg geven voor de keuze van de verschillende waardes van de service-maatstaven. De verschillende waardes voor de service-maatstaven lijken weinig realistisch. Een bedrijf zou immers niet zulke lage service-vereisten vooropstellen (bijvoorbeeld 35 producten te weinig in een bestelperiode of een kans op geen tekort van 35% in een bestelperiode). Maar deze waardes worden in deze sectie gekozen om het effect te onderzoeken van de bestelhoeveelheid q op het bestelpunt. Dit kan enkel gerealiseerd worden indien in sommige situaties het vooropgestelde verwachte aantal producten tekort aan de bestelhoeveelheid grenst of zelfs overschrijdt. De reden hiervoor is dat de resultaten anders zeer weinig zouden verschillen van deze waarbij maatstaf één en twee gecombineerd werden. Dezelfde redenering geldt ook voor de bepaling van de bestelhoeveelheid. Het is namelijk niet logisch dat de bestelhoeveelheid 25 zou bedragen terwijl de verwachte waarde tijdens de levertijd 50 bedraagt. Ook wordt voor deze sectie een model gebruikt met 130 evaluatiepunten in plaats van 80 (zoals hiervoor gebruikt). Deze keuze is gemaakt aangezien het interval van de vraag is toegenomen naar $[0,100]$ en de resultaten niet nauwkeurig zouden zijn indien voor dit interval slechts 80 evaluatiepunten gebruikt zouden worden. De reden voor de toename van het bereik van de vraag, heeft te maken met het feit dat indien het interval van de vraag hetzelfde bleef als hiervoor, door de hoge waardes van de twee maatstaven vaak als oplossing bekomen werd dat geen bestelpunt vereist zou zijn aan de vooropgestelde serviceniveaus te volden. Dit is niet gewenst daar het effect van de bestelhoeveelheid op het bestelpunt onderzocht wordt. Daardoor wordt geopteerd om het bereik van de vraag te verhogen waardoor voor elke situatie een bestelpunt verschillend van nul gevonden kan worden. Hierdoor kan het effect van de bestelhoeveelheid op het bestelpunt onderzocht worden.

Tabel 5.3: Gegevens combinatie service-maatstaf twee en drie

Situatie 1: Bestelhoeveelheid q=25					
Maatstaf 2 (m_4)	0.65	0.75	0.9	0.9	0.95
Maatstaf 3 (m_5)	15	25	35	40	40
Maatstaf 2 en 3	26	27	28	29	30
Situatie 2: Bestelhoeveelheid q=35					
Maatstaf 2 (m_4)	0.65	0.75	0.9	0.9	0.95
Maatstaf 3 (m_5)	15	25	35	40	40
Maatstaf 2 en 3	31	32	33	34	35
Situatie 3: Bestelhoeveelheid q=45					
Maatstaf 2 (m_4)	0.65	0.75	0.9	0.9	0.95
Maatstaf 3 (m_5)	15	25	35	40	40
Maatstaf 2 en 3	36	37	38	39	40

Tabel 5.4 geeft een overzicht van de uitkomsten voor de experimenten. In het onderste deel van de tabel staan de waardes voor het bestelpunt indien enkel één service-maatstaf gebruikt werd. De rest van *tabel 5.4* geeft een overzicht van de situaties waarbij maatstaf twee en drie gecombineerd werden om het bestelpunt te bepalen. In de rijen "maatstaf één" en "maatstaf twee" staan de waardes die gebruikt werden voor respectievelijk m_4 en m_5. Het overeenkomstige bestelpunt kan afgelezen worden uit de rij "Maatstaf 2 en 3". Deze waarde stemt overeen met het bestelpunt dat gekozen moet worden om te voldoen aan de vooropgestelde serviceniveaus.

Als naar de bepaling van het bestelpunt gekeken wordt indien enkel één serviceniveau vooropgesteld wordt, is het effect van de bestelhoeveelheid op het bestelpunt duidelijk zichtbaar. Bij situatie één ($q = 25$) is de limiet op het bestelpunt (s = 25.38) gelijk aan de situatie waarbij het gewenst aantal tekort in een bestelperiode gelijk is aan de bestelhoeveelheid. Het bestelpunt mag in deze situatie niet lager worden aangezien dit zou resulteren in een situatie waarbij het aantal producten tekort in backorder hoger is dan de bestelhoeveelheid. Deze situatie wordt echter niet onderzocht in deze masterproef. Voor elk gewenst verwacht tekort boven de bestelhoeveelheid blijft het bestelpunt daarom ongewijzigd. Dezelfde redenering geldt voor situatie twee ($q = 35$) met het verschil dat de limiet voor het bestelpunt bereikt wordt indien het verwacht aantal tekort = 35 eenheden. Bij de laatste situatie ($q = 45$) is geen sprake van een limiet aangezien het gewenst verwacht tekort de bestelhoeveelheid niet overschrijdt. Deze waarden komen ook overeen met de waardes die bekomen zouden worden indien maatstaf één gebruikt wordt. De combinatie van service-maatstaf twee en drie leidt tot dezelfde conclusie als bij de combinatie van service-maatstaf één en twee. Het bestelpunt wordt namelijk bepaald aan de hand van de bindende maatstaf van de twee. Zo is bij mogelijkheid 39 maatstaf twee de bindende maatstaf aangezien indien een kans op tekort in een bestelperiode van 90% vooropgesteld wordt het bestelpunt = 20.76, en het bestelpunt om te voldoen aan het verwachte maximum van 40 producten tekort in een bestelperiode = 15.38. Bij mogelijkheid 40 is maatstaf drie de bindende maatstaf met een bestelpunt van 15.38 eenheden voor het verwachte maximum van 40 producten tekort in een bestelperiode tegenover 6.92 eenheden voor de verwachte kans op een tekort van 95%. De vetgedrukte waardes in *tabel 5.4* geven aan voor welke mogelijkheden maatstaf drie de bindende maatstaf is. Het effect van de waarde van de bestelhoeveelheid op het bestelpunt is ook duidelijk in mogelijkheden 28 en 33. Waar het bestelpunt bij mogelijkheid 28 beperkt wordt tot 25.38 eenheden doordat de bestelhoeveelheid slechts 25 eenheden bedraagt is het bestelpunt bij mogelijkheid 33 voor dezelfde waardes van maatstaf twee en drie verlaagd naar 20.76 eenheden. Dit is het gevolg van de verhoging van de bestelhoeveelheid naar 35. Dit resulteert in een verandering voor het bestelpunt waardoor maatstaf twee de bindende maatstaf wordt.

Kort samengevat kan geconcludeerd worden dat de bepaling van het bestelpunt aan de hand van meerdere service-maatstaven geen toegevoegde waarde heeft ten opzichte van de bepaling van het bestelpunt aan de hand van één service-maatstaven. Het resultaat kan terugbracht worden naar de waarde van het bestelpunt indien het bestelpunt afzonderlijk aan de hand van één van de twee service-maatstaven bepaald wordt. Het combineren van service-maatstaven is van toegevoegde waarde indien het bedrijf vooropstelt dat aan verschillende service-maatstaven tegelijk voldaan moet zijn.

Tabel 5.4: Output gecombineerd model service-maatstaf twee en drie

Maatstaf 2	Maatstaf 3	Maatstaf 1 en 2 gecombineerd q=25	Maatstaf 2	Maatstaf 3	Maatstaf 1 en 2 gecombineerd q=35
m_4 =0.65	m_5 =15	s =36.92	m_4 =0.65	m_5 =15	s =36.92
m_4 =0.75	m_5 =25	s =33.07	m_4 =0.75	m_5 =25	s =33.07
m_4 =0.90	m_5 =35	$\boldsymbol{s}$ =**25.38**	m_4 =0.90	m_5 =35	s =20.76
m_4 =0.90	m_5 =40	$\boldsymbol{s}$ =**25.38**	m_4 =0.90	m_5 =40	s =20.76
m_4 =0.95	m_5 =40	$\boldsymbol{s}$ =**25.38**	m_4 =0.95	m_5 =40	$\boldsymbol{s}$ =**15.38**

Maatstaf 2	Maatstaf 3	Maatstaf 1 en 2 gecombineerd q=45
m_4 =0.65	m_5 =15	s =36.92
m_4 =0.75	m_5 =25	s =33.07
m_4 =0.90	m_5 =35	s =20.76
m_4 =0.90	m_5 =40	s =20.76
m_4 =0.95	m_5 =40	$\boldsymbol{s}$ =**10**

Maatstaf 2	Bestelpunt
m_4 =0.65	s =36.92
m_4 =0.75	s =33.07
m_4 =0.90	s =20.76
m_4 =0.95	s =6.92
/	/

Maatstaf 3	Bestelpunt (q=25)	Bestelpunt (q=35)	Bestelpunt (q=45)
m_5 =15	s =35.38	s =35.38	s =35.38
m_5 =25	s =25.38	s =25.38	s =25.38
m_5 =35	s =25.38	s =15.38	s =15.38
m_5 =40	s =25.38	s =15.38	s =10

5.2. Onderzoek 2: Unimodaal model voor maatstaf één

Tot hiertoe is het bestelpunt in deze masterproef steeds bepaald met behulp van een gegeven eerste-, tweede moment en eindig bereik van de verdeling als gedeeltelijke beschikbare informatie. Het is echter niet altijd eenvoudig om een nauwkeurige waarde voor het tweede moment te bepalen. In zulke gevallen is het interessant om na te gaan of informatie gekend is over de modus van de verdeling. Daarom wordt in dit deel onderzocht hoe het bestelpunt bepaald kan worden aan de hand van de waarde voor de modus. Meer specifiek aan de hand van verdelingen met één unieke modus waarbij de waarde van deze modus gekend is. Dit zal gedaan worden voor service-maatstaf één. Een verdeling met een unieke modus of unimodale verdeling wordt gedefinieerd als zijnde (strikt) stijgend voor waardes rechts van de modus en (strikt) dalend voor waardes links van de modus. Dit deel is als volgt opgebouwd. Eerst wordt een lineair programma uitgewerkt voor het bepalen van het bestelpunt in het geval dat het eerste moment en de unieke modus gekend is. Daarna worden hierop enkele sensitiviteitsanalyses uitgevoerd. Vervolgens wordt de situatie onderzocht waarin zowel het tweede moment als de unieke modus gekend zijn en welk effect dit op de waarde van het bestelpunt heeft. Tenslotte wordt onderzocht, indien de keuze uit één van de twee gemaakt moet worden, of best het tweede moment van de verdeling of de unieke modus van de verdeling gekend kan zijn om het bestelpunt te bepalen.

5.2.1. Ontwikkelen van een lineair programma voor maatstaf 1 (unieke modus gekend)

Zoals eerder vermeld wordt in dit deel een lineair programma ontwikkeld voor een situatie waarbij de modus gekend is en verondersteld wordt dat de verdeling unimodaal is. Verder wordt verondersteld dat het bereik van de vraag alsook het eerste moment van de verdeling gekend zijn. Vooraleer de boven- en ondergrens van het bestelpunt bepaald kan worden indien de verdeling unimodaal is, moeten eerst enkele aanpassingen gebeuren. Deze aanpassingen worden gemaakt aangezien geweten is dat de verdeling unimodaal is. Hierbij wordt gebruikt gemaakt van een stelling van Khinchine in verband met unimodale verdelingen. De theorie zegt dat: *"een stochastische variabele Z is unimodaal met modus 0 en bereik I enkel en alleen als het dezelfde verdeling heeft als het product van U en V waarbij U en V twee onafhankelijke variabelen zijn waarbij U uniform verdeeld is over een interval $[0,1]$ en V een bereik gelijk aan I heeft"* (Feller, 1984).

Als deze stelling toegepast wordt op een situatie met een vraag X, een modus m en een bereik van $[0, b]$, kan een variabele Z gedefinieerd worden als $Z = X - m$ zodat variabele V een bereik heeft van $[-m, b - m]$. Hieruit volgt dat voor elke functie f:

$$E[f(z)] = E[f^*(V)] \tag{5.9}$$

met

$$f^*(x) = E[(f(UV)|V = x)] = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \tag{5.10}$$

Als Y gedefineerd wordt als $Y = V + m$ heeft variabele Y een bereik van $[0, b]$ waardoor

$$E[f(X)] = E\left[\widehat{f}(Y)\right] \tag{5.11}$$

met

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{x-m}\int_0^{x-m} f(t+m)dt \tag{5.12}$$

$\widehat{f}(x)$ is hierbij de Khinchine transformatie van $f(x)$.

Als dit op maatstaf één toegepast wordt, geeft dit:

$$\int_s^b (x-s)dF_X(x) = \int_s^b \widehat{f}(x)\, dF_Y(x) \tag{5.13}$$

Doordat een unimodale verdeling dezelfde verdeling van variabele Y moeten volgen, moeten enkele transformaties uitgevoerd worden (IMA journal of Management mathematics, 2014). Als eerste wordt het eerste moment aangepast. Het eerste moment onder X was gelijk aan m_1. Dit wordt getransformeerd door middel van de Khinchine transformatie uit *(5.12)*. Dit geeft:

$$v_1 = 2m_1 - m \tag{5.14}$$

Verder moet ook $(x-s)_+$ getransformeerd worden vooraleer deze functie gebruikt kan worden bij unimodale verdelingen. Deze functie wordt weergegeven door $f(x)$ in *(5.13)*. Bij de transformatie wordt een onderscheid gemaakt worden tussen twee gevallen, namelijk $s > m$ en $s < m$. Eerst zal het geval van $s > m$ besproken worden.

In het geval dat verondersteld wordt dat het bestelpunt s hoger ligt dan de unieke modus van de verdeling, is de Khinchine transformatie van $(x-s)_+$ gelijk aan:

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2}\frac{(x-s)^2}{(x-m)} \tag{5.15}$$

In het geval dat verondersteld wordt dat het bestelpunt lager ligt als de unieke modus van de verdeling is, de Khinchine transformatie van $(x-s)_+$ gelijk aan:

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2}\frac{(m-s)^2}{(m-x)} * 1_{[0,m[} + \frac{1}{2}[(x-s)+(m-s)] * 1_{]m,b]} \tag{5.16}$$

Nu alle noodzakelijke elementen uitgedrukt zijn in termen van een unimodale verdeling, kan de methode van Goovaerts, Haezendonck en De Vylder (1982) uit sectie *4.2.1* hierop toegepast worden. Dit geeft uiteindelijk de volgende lineaire programma's die het bestelpunt berekenen in het geval dat een bepaald verwacht aantal producten tekort in een bestelperiode vooropgesteld is en het eerste moment, het bereik van de vraag en de unieke modus van de verdeling gekend zijn.

Geval 1: $s > m$

$$Min\ s \tag{5.17}$$

beperkt tot:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{5.18}$$

$$\sum_i x_i * p_i = v_1 \tag{5.19}$$

$$\sum_{j=1}^{k'} y_j = 1 \tag{5.20}$$

$$s \geq x_j * y_j \ \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.21}$$

$$\sum_{i=1}^{k'} p_i * \frac{1}{2}\frac{(x-s)^2}{(x-m)} \leq\ m_3 * y_j + v_1\left(1 - y_j\right) \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.22}$$

De doelfunctie *(5.17)* en beperking *(5.18)* blijven hetzelfde als *(4.33)* en *(4.34)* voor maatstaf één. Bij beperking *(5.19)* is v_1 het resultaat van de Khinchine transformatie van het eerste moment. Dit is nodig aangezien gekend is dat de verdeling unimodaal is. De beperking voor het tweede moment *(4.36)* is niet aanwezig aangezien het tweede moment van de verdeling niet gekend is. Beperkingen *(5.20)* en *(5.21)* zijn noodzakelijk voor het lineair maken van het model en beperking *(5.22)* legt een limiet op voor het maximaal verwachte aantal producten tekort tijdens een bestelperiode. Het verschil met *(4.39)* is hier de Khinchine transformatie van $(x-s)_+$ voor het geval dat de het bestelpunt hoger ligt dan de unieke modus van de verdeling.

Geval 2: $s < m$

$$Min\ s \tag{5.23}$$

beperkt tot:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{5.24}$$

$$\sum_i x_i * p_i = v_1 \tag{5.25}$$

$$\sum_{j=1}^{k'} y_j = 1 \tag{5.26}$$

$$s \geq x_j * y_j \ \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.27}$$

$$\sum_{i=1}^{k'} p_i * \frac{1}{2}\frac{(m-s)^2}{(m-x)} * 1_{[0,m[} + \frac{1}{2}[(x-s) + (m-s)] * 1_{]m,b]}\ \leq\ m_3 * y_j + v_1\left(1 - y_j\right) \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.28}$$

Vergelijkingen *(5.23)–(5.27)* zijn hetzelfde als hierboven. Voor beperking *(5.28)* wordt de Khinchine transformatie van $(x-s)_+$ toegepast voor het geval dat het bestelpunt lager ligt dan de unieke modus van de verdeling.

Bij de bepaling van het optimaal bestelpunt moeten beide situaties onderzocht worden. Het is immers vooraf niet geweten of het bestelpunt hoger of lager dan de modus zal liggen. Dit vormt echter geen probleem aangezien één van de twee oplossingen niet uitvoerbaar of geldig zal zijn.

5.2.2. Sensitiviteitsanalyse

In dit deel wordt onderzocht welke invloed bepaalde factoren hebben op het bestelpunt indien de unieke modus van de verdeling gekend is. De resultaten worden bekomen door middel van de lineaire programma's uitgewerkt in het vorige deel. Zoals eerder ook vermeld in sectie *2.2* zijn in de literatuur veel discussies omtrent de belangrijkheid van de karakteristieken van een verdeling. Aangezien in dit deel gefocust wordt op unimodale verdelingen kan het nuttig zijn enkele experimenten uit te voeren om het effect van de kennis van de unieke modus op het bestelpunt te onderzoeken. Hiertoe zullen vier zaken onderzocht worden. Als eerste wordt gekeken naar het effect op het bestelpunt bij een verandering van de unieke modus. Vervolgens wordt het effect op het bestelpunt onderzocht van een verandering in het bereik van de vraag. Als derde wordt gekeken naar het effect van de unieke modus op het bestelpunt indien het eerste- en het tweede moment van de verdeling gekend zijn. Als laatste wordt de invloed op het bestelpunt onderzocht van enerzijds de toevoeging van het tweede moment en anderzijds de toevoeging van de unieke modus.

5.2.2.1. Effect van de verandering van de modus op het bestelpunt

Het effect op het bestelpunt bij een verandering van de unieke modus wordt onderzocht aan de hand van volgende gegevens:

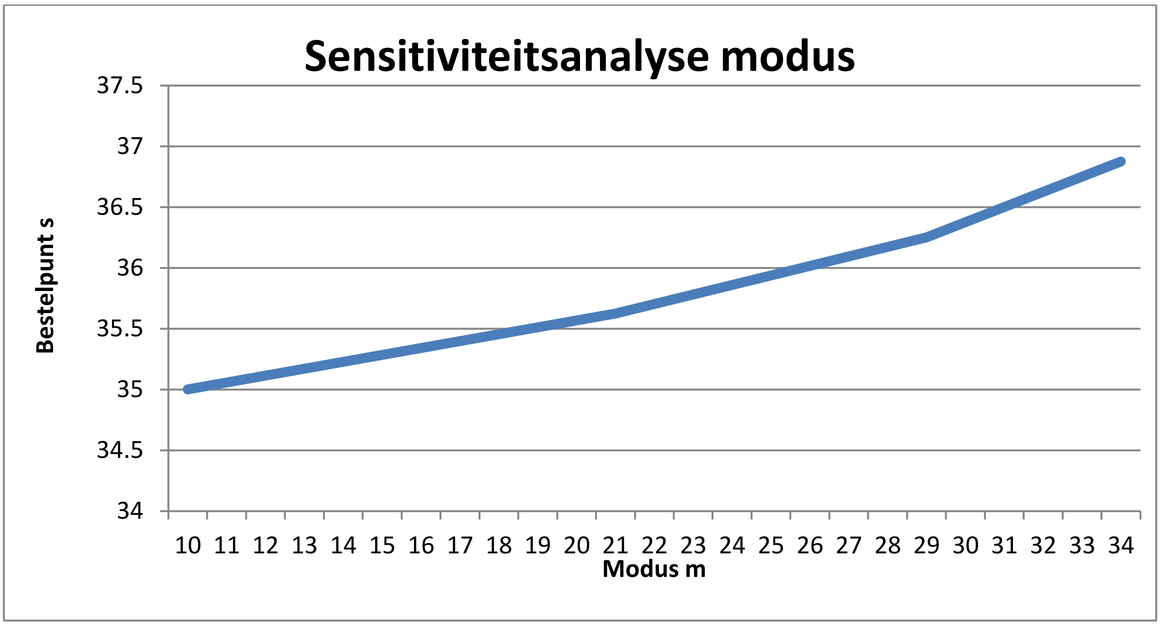
- Bereik van de vraag tijdens de leverperiode $[0,50]$
- Eerste moment $m_1 = 30$
- Maximaal verwachte aantal tekort $m_3 = 3$
- Aantal evaluatiepunten $k' = 80$

Het effect van de verandering van de modus op het bestelpunt s is weergegeven in *figuur 3*. De waarde van de unieke modus varieert hierbij tussen 10 en 35. Voor deze situatie kan geconcludeerd worden dat het risico voor de beslissingsnemer niet zo hoog is indien de waarde voor de unieke modus verkeerd ingeschat wordt. De waardes van het bestelpunt variëren namelijk weinig in vergelijking met de verandering van de modus. De waardes voor het bestelpunt beginnen voor een unieke modus = 10 bij 35 eenheden en eindigen bij 37.875 eenheden voor een modus = 35. Uit dit gegeven kan geconcludeerd worden dat het belangrijker is te weten of de vraag tijdens de levertijd unimodaal verdeeld is in plaats van de juiste waarde van de unieke modus te kennen.

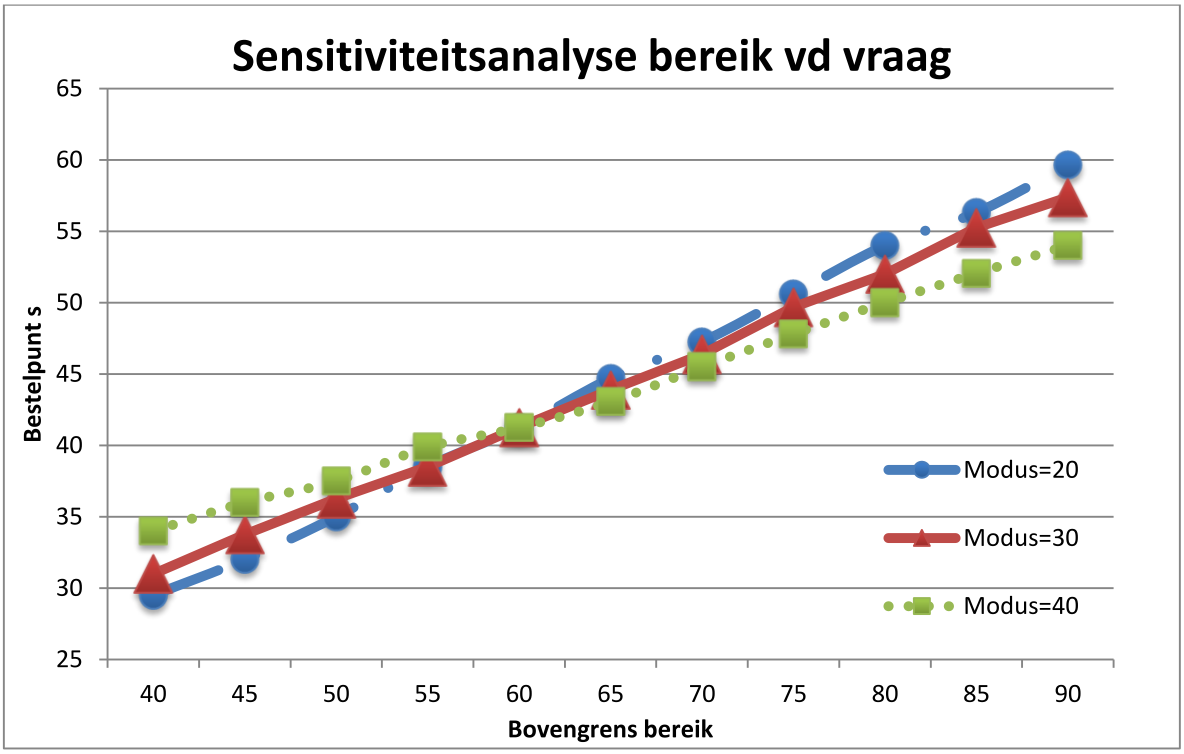
5.2.2.2. Effect van de verandering van het bereik op het bestelpunt

In deze sectie wordt de invloed op het bestelpunt onderzocht bij een verandering in het bereik van de vraag. Het kan in sommige gevallen moeilijk zijn om exact het bereik van de vraag tijdens de levertijd te schatten. *Figuur 4* geeft de invloed op het bestelpunt weer van een verandering in het bereik van de vraag. De gegevens zijn dezelfde als hiervoor bij *5.2.2.1*. De sensitiviteitsanalyse is uitgevoerd voor drie verschillende waardes van de unieke modus m. Er wordt geconcludeerd dat de waarde van het bestelpunt toeneemt naargelang het bereik van de vraag toeneemt. Dit is logisch als we hetzelfde verwachte aantal producten tekort behouden maar de vraag tijdens de levertijd hoger kan oplopen. Ook kan geconcludeerd worden dat de hellingsgraad verschilt naargelang de waarde van de modus. Meer specifiek neemt de hellingsgraad af naarmate de modus toeneemt.

Figuur 3: Sensitiviteitsanalyse modus



Figuur 4: Sensitiviteitsanalyse bereik



5.2.2.3. Bepaling van het bestelpunt indien eerste-, tweede moment en modus gekend zijn

In dit deel wordt onderzocht welk effect de toevoeging van de modus heeft op de waarde van het bestelpunt indien het eerste- en tweede moment van de verdeling ook gekend zijn. Ligt het bestelpunt hierdoor hoger of lager als bij de situatie waarbij enkel het eerste en tweede moment gekend zijn? Vooraleer dit onderzocht kan worden, moet eerst een lineair programma uitgewerkt worden om het bestelpunt te bepalen indien het tweede moment ook gekend is. Dit programma is gebaseerd op het lineair programma uit sectie *5.2.1*. Deze beperking is, indien niet geweten is of de verdeling unimodaal is, gelijk aan:

$$\sum_i x_i^2 * p_i = m_2 \tag{5.29}$$

Maar omdat een unimodale verdeling verondersteld wordt, moet het tweede moment m_2 hierdoor aangepast worden. Dit gebeurt door middel van de Khinchine transformatie uit *(5.12)* wat resulteert in:

$$v_2 = 3m_2 - 2mm_1 \tag{5.30}$$

Nu alle gegevens gekend en omgezet zijn kan de veiligheidsvoorraad berekend worden met volgende lineaire programma's naargelang $s > m$ of $s < m$ (IMA journal of Management mathematics, 2014):

Geval 1: $s > m$

$$Min\ s \tag{5.31}$$

beperkt tot:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{5.32}$$

$$\sum_i x_i * p_i = v_1 \tag{5.33}$$

$$\sum_i x_i^2 * p_i = v_2 \tag{5.34}$$

$$\sum_{j=1}^{k'} y_j = 1 \tag{5.35}$$

$$s \geq x_j * y_j \quad \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.36}$$

$$\sum_{i=1}^{k'} p_i * \frac{1}{2}\frac{(x-s)^2}{(x-m)} \leq\ m_3 * y_j + v_1(1 - y_j)\ \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.37}$$

Geval 2: $s < m$

$$Min\ s \tag{5.38}$$

beperkt tot:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{5.39}$$

$$\sum_i x_i * p_i = v_1 \tag{5.40}$$

$$\sum_i x_i{}^2 * p_i = v_2 \tag{5.41}$$

$$\sum_{j=1}^{k'} y_j = 1 \tag{5.42}$$

$$s \geq x_j * y_j \quad \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.43}$$

$$\sum_{i=1}^{k'} p_i * \frac{1}{2}\frac{(m-s)^2}{(m-x)} * 1_{[0,m[} + \frac{1}{2}[(x-s)+(m-s)] * 1_{]m,b]} \ \leq\ m_3 * y_j + v_1\big(1-y_j\big)\ \forall\, j = 1, \dots, k' \tag{5.44}$$

Als laatste wordt nog een voorwaarde toegevoegd voor het verzekeren van een beetje asymmetrie. Deze voorwaarde is normalerwijze vanzelf voldaan. De voorwaarde is gelijk aan:

$$\frac{4}{3}m < 0' = \frac{v_2}{v_1} \tag{5.45}$$

Aan de hand van de lineaire programma’s kan het effect van het tweede moment in combinatie met de unieke modus onderzocht worden. Dit wordt gedaan aan de hand van twee experimenten. Als eerste zal onderzocht worden wat het effect op het bestelpunt is van een model waarbij de unieke modus en het tweede moment gekend zijn in vergelijking met een model waarbij enkel het tweede moment gekend is. Als tweede wordt het effect op het bestelpunt onderzocht van een model waarbij de unieke modus en het tweede moment gekend zijn in vergelijking met een model waarbij enkel de unieke modus gekend is.

Wat is het effect op het bestelpunt van de toevoeging van het tweede moment samen met de unieke modus? Het effect op het bestelpunt zal onderzocht worden door de waardes van het tweede moment alsook de waardes van de modus te laten variëren. De resultaten zijn terug te vinden in *tabel 5.5*. Alle resultaten zijn gebaseerd op een gewenst maximaal verwacht tekort van 3 eenheden.

Tabel 5.5: Output service-maatstaf één (effect modus):

		Situatie 1		
Eerste moment	Tweede moment	Bestelpunt met modus=	Bestelpunt met modus=	Bestelpunt zonder modus
30	900	NF	NF	27.5
		Situatie 2		
Eerste moment	Tweede moment	Bestelpunt met modus=22	Bestelpunt met modus=25	Bestelpunt zonder modus
30	925	28.75	27.5	27.5
		Situatie 3		
Eerste moment	Tweede moment	Bestelpunt met modus=13	Bestelpunt met modus =29	Bestelpunt zonder modus
30	1000	33.125	30.625	28.75
		Situatie 4		
Eerste moment	Tweede moment	Bestelpunt met modus=30	Bestelpunt met modus=35	Bestelpunt zonder modus
30	1100	36.25	35.625	31.875
		Situatie 5		
Eerste moment	Tweede moment	Bestelpunt met modus=	Bestelpunt met modus=	Bestelpunt zonder modus
30	1200	NF	NF	35

Vijf verschillende situaties werden onderzocht waarbij de waarde van het tweede moment veranderd werd beginnend van $m_2 = 900$ tot en met $m_2 = 1200$. *Tabel 5.5* is als volgt opgebouwd, links in de tabel staan de waardes van het eerste en tweede moment voor de situatie die onderzocht wordt. Dit zijn de waardes voor m_1 en m_2. In de derde en vierde kolom staan de waardes voor het bestelpunt in het geval dat het eerste-, tweede moment en de unieke modus van de verdeling gekend zijn. De waarden van de modi verschillen van situatie tot situatie. De reden hiervoor is dat niet voor elke modus een mogelijke oplossing gevonden kon worden, enerzijds omdat er geen oplossing bestaat voor het gegeven probleem of anderzijds omdat niet voldaan is aan één van de voorwaarden van het model. De waardes van de modi die in de tabel weergegeven zijn, komen overeen met de twee uiterste modi waarvoor een toegelaten oplossing gevonden kon worden. Op deze manier wordt het hele bereik van het bestelpunt weergegeven. De laatste kolom geeft het optimaal bestelpunt weer indien enkel het eerste-, en tweede moment gekend zijn maar niet of de verdeling unimodaal is.

Bij analyse van de resultaten kan vastgesteld worden dat het bestelpunt hoger ligt indien het eerste-, tweede moment en de modus van de verdeling gekend is. Enkel in situatie 2 is het bestelpunt voor een modus = 25 hetzelfde. Ook wordt opgemerkt dat hoe hoger het tweede moment van de verdeling is, hoe groter het verschil tussen de resultaten met of zonder inachtneming van de modus is. Dit kan verklaard worden door het feit dat de variatie van het probleem toeneemt waardoor een groter interval aan waardes bereikt kunnen worden. Ook wordt vastgesteld dat voor het geval waarbij het eerste-, tweede moment en de modus van de verdeling gekend is, het bereik van waardes zeer gering is waarvoor een toegelaten oplossing gevonden kan worden. Er zijn enkel oplossingen te vinden indien het bereik van het tweede moment ligt tussen 912 en 1116. Dit is begrijpelijk aangezien aan meerdere beperkingen tegelijk voldaan moet worden waardoor de kans afneemt dat een mogelijke oplossing beschikbaar is. In de tabel wordt een geval zonder oplossing aangeduid door "NF" ("Non-feasible"). Bij de evolutie van de bestelpunten met wijzende modus, valt iets op. Naarmate de modus toeneemt, neemt de waarde voor het optimale bestelpunt af. Dit is het tegenovergestelde resultaat van sectie *5.2.2.1* waarbij het bestelpunt toenam indien waarde van de modus steeg. De toevoeging van het tweede moment in het model zorgt er in dit geval voor, dat het effect voor deze situaties omgekeerd wordt

Als tweede experiment wordt het effect op het bestelpunt onderzocht voor het geval waarbij de modus en het tweede moment gekend zijn in vergelijking met het geval waarbij enkel de unieke modus gekend is. Dit wordt gedaan door een vergelijking te maken van de resultaten indien enkel het eerste moment en de modus gekend zijn met de resultaten indien het eerste-, tweede moment en de modus gekend zijn. Het overzicht van de resultaten is terug te vinden in *tabel 5.6*. De overige gegevens voor dit experiment zijn: het eerste moment = 30 en het maximaal verwachte aantal tekort <= 3 eenheden.

Vier verschillende situaties worden onderzocht bij de wijzigende waarde van het tweede moment. De tabel is als volgt opgebouwd. Links in de tabel staat aangeduid welk model gebruikt is voor de bepaling van het optimaal bestelpunt. Hierbij stemt "Model (m_1, m)" overeen met het model waarbij enkel het eerste moment en de unieke modus van de verdeling gekend is en "Model (m_1, m_2, m)" het model waarbij het eerste-, tweede moment en de modus gekend zijn. De waardes voor het bestelpunt worden berekend voor een reeks van verschillende modi. Situatie 2 is hierbij iets verschillend ten opzichte van de rest in het feit dat het bereik van de toegelaten modi zo groot was dat hun aantal te groot was voor de tabel. Als oplossing hierop werden enkele waarden weggelaten uit de tabel. Deze waardes zijn niet zo belangrijk aangezien ze hetzelfde bestelpunt bekomen als de modi die wel in de tabel weergegeven zijn. Zo is bijvoorbeeld, voor beide modellen, het bestelpunt met een modus = 20 hetzelfde als de oplossing met de modus = 17. Zoals eerder vermeld komt "NF" in de tabel overeen met een geval waarbij geen toegelaten oplossing gevonden kon worden.

Bij de analyse van de resultaten kunnen enkele vaststellingen gedaan worden. Als eerste blijkt dat hoe hoger het tweede moment van de verdeling is, hoe hoger de verschillende modi moeten zijn om een toegelaten oplossing te vinden. Zo geven, voor het geval dat het tweede moment = 925, modus = 22 tot en met modus = 26 een mogelijke oplossing waar de mogelijke oplossingen indien het tweede moment = 1100 variëren van modus = 30 tot en met modus = 35. Een tweede vaststelling gaat over het verschil tussen de uitkomsten van de twee modellen. Zo wordt het verschil in optimaal bestelpunt tussen het model met het tweede moment en het model zonder het tweede moment kleiner naarmate het tweede moment groter wordt. Dit leidt uiteindelijk in situatie vier naar een resultaat waarbij de uitkomsten van de beide modellen samenvallen. Situatie vier is ook het laatste geval waarvoor indien het eerste-, tweede moment en de modus gekend zijn, een toegelaten oplossing voor het optimaal bestelpunt gevonden kan worden. Indien het tweede moment > 1116 is geen mogelijke oplossing te vinden indien de unieke modus gekend is.

De laatste vaststelling gaat verder op de resultaten van *tabel 5.5*. Daaruit bleek dat de invoeging van het tweede moment zorgde voor een ommekeer in de evolutie van het bestelpunt in functie van de modus. Meer specifiek indien het tweede moment gekend was, nam het bestelpunt af naarmate de modus steeg terwijl dit omgekeerd was indien het tweede moment niet betrokken werd. Analyse van de resultaten in *tabel 5.6* toont echter een verschil aan. Zo is dit voor de meeste gevallen correct buiten voor de uiterste waarden van het tweede moment waarvoor bij de unimodale verdeling nog een toegelaten oplossing te vinden is. In deze gevallen is dit omgekeerd en neemt het optimale bestelpunt toe naarmate de modus stijgt. Dit kan verduidelijkt worden aan de hand van situatie 4 waar het bestelpunt toeneemt als de modus toeneemt. Met dit nieuw gegeven kan de conclusie uit het vorige deel eerder gedefinieerd worden naar: de waarde van het bestelpunt kan, afhankelijk van de waarde van het tweede moment, stijgen of dalen naarmate de modus toeneemt.

Tabel 5.6: Output service-maatstaf één (effect tweede moment):

Situatie 1: $m_2 = 925$									
	Modus=20	Modus=21	Modus=22	Modus=23	Modus=24	Modus=25	Modus=26	Modus=27	Modus=28
Model (m_1, m)	35	35.625	35.625	35.625	35.625	35.625	35.625	35.625	35.625
Model (m_1, m_2, m)	NF	NF	28.75	28.125	28.125	27,5	NF	NF	NF
Situatie 2: $m_2 = 1000$									
	Modus=13…	Modus=17…	Modus=21…	Modus=25	Modus=26	Modus=27	Modus=28	Modus=29	Modus=30
Model (m_1, m)	35	35	35.625	35.625	35.625	35.625	35.625	36.25	36.25
Model (m_1, m_2, m)	33.125	32.5	31.875	31.25	31.25	31.25	30.625	30.625	/(NF)
Situatie 3: $m_2 = 1100$									
	Modus=29	Modus=30	Modus=31	Modus=32	Modus=33	Modus=34	Modus=35	Modus=36	Modus=37
Model (m_1, m)	36,25	36,25	36,25	36,25	36,25	36,875	36,875	36,875	NF
Model (m_1, m_2, m)	NF	36,25	36,25	36,25	36,25	35,625	35,625	NF	NF
Situatie 4: $m_2 = 1116$									
	Modus=29	Modus=30	Modus=31	Modus=32	Modus=33	Modus=34	Modus=35	Modus=36	Modus=37
Model (m_1, m)	36,25	36,25	36,25	36,25	36,25	36,875	36,875	36,875	NF
Model (m_1, m_2, m)	NF	36,25	36,25	36,25	36,25	36,875	36,875	36,875	NF

5.2.2.4. Het effect van de toevoeging van het tweede moment of de unieke modus op de bestelhoeveelheid

In deze sectie wordt onderzocht welke parameter het beste gegeven kan zijn indien het eerste moment van de verdeling gekend is. De twee parameters die onderzocht worden zijn, enerzijds de waarde van het tweede moment zonder de informatie of de verdeling unimodaal is en anderzijds de kennis dat de verdeling unimodaal is en de unieke modus van de verdeling gekend is. De uitkomsten van de twee experimenten zullen vergeleken worden met een basistest die bestaat uit de waarden wanneer enkel het eerste moment van de verdeling gekend is. De uitwerking gebeurt als volgt:

Als eerste zal de basistest uitgewerkt worden. Voor deze test zal het bestelpunt bepaald worden indien het eerste moment van de verdeling gekend is maar niet geweten is of deze verdeling ook unimodaal is. Zes verschillende situaties worden voor de basistest onderzocht, namelijk $m_1 = 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Vervolgens moeten, voor elk van de twee parameters, de waardes bepaald worden die onderzocht zullen worden. Voor het geval waarbij de waarde van het tweede moment gekend is, worden telkens drie verschillende waarden voor het tweede moment onderzocht. Voor het geval waarbij de unieke modus van de verdeling gekend is, worden ook telkens drie verschillende waardes voor de unieke modus onderzocht.

De resultaten zijn weergegeven in *tabel 5.7*. De bepaling van het bestelpunt gebeurde volgens de eerder in deze masterproef uitgewerkte lineaire programma's. Het gewenst maximaal verwacht aantal tekort tijdens een bestelperiode wordt voor alle gevallen op drie eenheden vastgelegd. Het bereik van de vraag tijdens de bestelperiode kan variëren tussen 0 en 50 eenheden. De tabel is als volgt opgebouwd.

In het midden van de tabel staat, voor elke situatie, de uitkomst van de basistest. De basistest bepaalt het optimaal bestelpunt indien enkel het eerste moment van de verdeling gekend is maar niet geweten is of deze verdeling unimodaal is. Het linkerdeel van de tabel geeft de uitkomsten weer indien de waarde van het tweede moment toegevoegd wordt. De uitkomsten voor het bestelpunt zijn het resultaat van het geval waarbij het eerste en tweede moment gekend is, maar niet geweten is of de verdeling unimodaal is. De waardes voor het tweede moment worden hier per situatie verhoogd zodat de variantie in elke situatie hetzelfde blijft, namelijk 200 voor de eerste waarde, 300 voor de tweede waarde en 400 voor de derde waarde. De rechterzijde van de tabel geeft de uitkomsten weer indien de unieke modus toegevoegd wordt. De uitkomsten voor het bestelpunt zijn het resultaat van het geval waarbij het eerst moment en de modus gekend zijn en geweten dat de verdeling unimodaal is. De waarden voor de unieke modi die onderzocht worden zijn zo gekozen zodat het hele bereik van modi waarvoor een oplossing bestaat, onderzocht worden.

Uit analyse van de resultaten blijkt dat de waarde van het tweede moment beter gekend kan zijn in plaats van de informatie dat de verdeling unimodaal is en de unieke modus hierbij gekend is. Dit wordt geconcludeerd uit het feit dat het verschil tussen het bestelpunt bij de basistest en het geval waarbij de waarde voor het tweede moment gekend is hoger is als het verschil tussen het bestelpunt bij de basistest en het geval waarbij de unieke modus van de verdeling gekend is. Dit verschil kan best zo klein mogelijk zijn aangezien een groter verschil resulteert in hogere kosten en betekent dat deze parameter meer invloed heeft op het bestelpunt. Zo is bijvoorbeeld voor situatie één het maximale verschil tussen de basistest en het geval met de unieke modus gelijk aan 15 (27.5-12.5) waar het verschil tussen de basistest en het geval met het tweede moment gekend bijna 20 is (31.88-12.5). Hierbij komt nog dat de waardes voor het tweede moment nog hoger kunnen oplopen als degene die in de tabel aangegeven zijn waardoor het verschil in bestelpunt tussen beiden situaties nog verhoogd wordt. Het verschil tussen de bestelpunten is voor elk van de onderzochte situaties hoger in het geval dat het tweede moment gekend is.

Deze resultaten bevestigen ook een eerder gemaakte conclusie uit dit deel. Zo kan opgemerkt worden dat de sensitiviteit van het bestelpunt ten opzichte van een verandering in de unieke modus niet zo hoog is. Uit deze tabel kan wel opgemerkt worden dat voor het onderzocht probleem de sensitiviteit toeneemt naarmate het eerste moment van de verdeling zich verder weg van het midden van het bereik van de vraag situeert.

Kort samengevat kunnen volgende zaken geconcludeerd worden voor de onderzochte experimenten uit onderzoek twee. Als eerste werd vastgesteld dat het belangrijker is om te weten of de verdeling unimodaal of niet is, dan de exacte waarde van de unieke modus te kennen. Dit is te danken aan het feit dat het bestelpunt niet veel van waarde verandert in vergelijking met de verandering in de unieke modus. Een tweede vaststelling die gedaan werd, was dat naarmate de waarde van de modus hoger ligt, het bestelpunt minder snel toeneemt ten gevolge van een stijging in het bereik van de vraag. Vervolgens werd het effect van de modus onderzocht indien het eerste en tweede moment van de verdeling gekend waren. Hier werd geconcludeerd dat de waardes voor het bestelpunt hoger liggen indien het eerste-, tweede moment en de unieke modus van de vraag gekend waren in vergelijken met de situatie waarbij enkel het eerste- en tweede moment gekend waren en niet geweten was of de verdeling unimodaal is. Een vierde vaststelling betreft de waarde van het tweede moment indien geweten is dat de verdeling unimodaal is. Geconcludeerd werd dat, afhankelijk van de waarde van het tweede moment, het bestelpunt kan stijgen of dalen naarmate de modus toeneemt. Een andere vaststelling over de waarde van het tweede moment was dat naarmate de waarde van het tweede moment toeneemt, het verschil tussen de waardes van het bestelpunt kleiner werden tussen enerzijds het geval waarbij het eerste moment en de modus gekend zijn en anderzijds het geval waarbij het eerste-, tweede moment en de modus gekend zijn. In de laatste sectie van onderzoek twee werd geconcludeerd dat, indien enkel het eerste moment gekend is, best de kennis van de waarde van het tweede moment verkozen wordt boven de kennis van de unieke modus.

Tabel 5.7: Output parameters tweede moment in vergelijking met unieke modus:

Situatie 1 $m_1 = 15$								
Tweede moment	$m_2 =$ 425	$m_2 =$ 525	$m_2 =$ 625	Basistest	Unieke modus	$m =$ 1	$m =$ 10	$m =$ 19
Bestel-punt	s =18.75	s = 25	s = 31.88	s =12.5	Bestel-punt	s =27.5	s =25	s =21.25
Situatie 2 $m_1 = 20$								
Tweede moment	$m_2 =$ 600	$m_2 =$ 700	$m_2 =$ 800	Basistest	Unieke modus	$m =$ 1	$m =$ 15	$m =$ 27
Bestel-punt	s =22.5	s =27.5	s =32.5	s =17.5	Bestel-punt	s =30.63	s =29.38	s =27.5
Situatie 3 $m_1 = 25$								
Tweede moment	$m_2 =$ 825	$m_2 =$ 925	$m_2 =$ 1025	Basistest	Unieke modus	$m =$ 1	$m =$ 16	$m =$ 31
Bestel-punt	s =27.5	s =31.25	s =35	s = 22.5	Bestel-punt	s =33.13	s =33.13	s =33.13
Situatie 4 $m_1 = 30$								
Tweede moment	$m_2 =$ 1100	$m_2 =$ 1200	$m_2 =$ 1300	Basistest	Unieke modus	$m =$ 10	$m =$ 23	$m =$ 36
Bestel-punt	s =31.88	s =35	s =38.75	s = 27.5	Bestel-punt	s = 35	s =35.63	s =36.88
Situatie 5 $m_1 = 35$								
Tweede moment	$m_2 =$ 1425	$m_2 =$ 1525	$m_2 =$ 1625	Basistest	Unieke modus	$m =$ 21	$m =$ 30	$m =$ 39
Bestel-punt	s =36.88	s =38.38	s =42.5	s =32.5	Bestel-punt	s =36.88	s =38.13	s =40
Situatie 6 $m_1 = 40$								
Tweede moment	$m_2 =$ 1800	$m_2 =$ 1900	$m_2 =$ 2000	Basistest	Unieke modus	$m =$ 30	$m =$ 35	$m =$ 41
Bestel-punt	s =41.25	s =43.75	s =46.25	s =37.5	Bestel-punt	s =39.38	s =41.25	s =41.88

5.3. Onderzoek 3: Kostenfuncties met behulp van service-maatstaf drie

In dit deel wordt dieper ingegaan op service-maatstaf drie, de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode. Zoals eerder aangegeven heeft deze maatstaf twee beslissingsvariabelen in de vorm van de bestelhoeveelheid q en het bestelpunt s. Het doel van een bedrijf bestaat erin om voldoende service aan hun klanten aan te bieden zonder dat de kosten hierbij te hoog oplopen. In dit deel wordt getoond hoe deze doelstelling gehaald kan worden. Door de opbouw van het lineair programma voor maatstaf drie kan een oplossing enkel gevonden worden indien één van deze twee vooraf vastgelegd wordt. Als eerste zal de evolutie van de totale kost onderzocht worden indien het bestelpunt vooraf vastgelegd wordt. Nadien wordt de evolutie van de totale kost onderzocht indien de bestelhoeveelheid vooraf vastgelegd wordt. Als laatste wordt de combinatie van het bestelpunt en de bestelhoeveelheid bepaald waarbij de totale kosten geminimaliseerd worden.

5.3.1. Bepaling van het verwachte aantal tekort in backorders

Zoals eerder ook vermeld in *sectie 2.3.1.* is de totale jaarlijkse kostenfunctie gelijk aan:

$$C(s,q) = C_p * \frac{E(D)}{q} + C_h * (\frac{1}{2}q + s - E(X)) + C_s * \frac{E(D)}{q} * \int_s^q (x-s)f(x)dx \tag{5.46}$$

deze kostenfunctie bestaat uit drie verschillende soorten kosten, met name voorraadkosten, bestelkosten en tekortkosten. De bepaling van de eerste twee soorten kosten is eenvoudig, terwijl de bepaling van de tekortkost niet zo eenvoudig ligt. In deze kost zit namelijk een service element $\int_s^q (x-s)f(x)dx$ verscholen waarmee rekening gehouden moet worden. Met behulp van de lineaire programma's uitgewerkt in deze masterproef kan deze integraal benaderd worden en het verwachte aantal producten in backorders in een bestelperiode bepaald worden.

Het lineair programma voor het bepalen van het maximaal verwachte aantal producten in backorders in een bestelperiode is gelijk aan (Janssens en Ramaekers (2008):

$$Min \sum_{j=1}^{2} y_j m_j + y_3 * 1 \tag{5.47}$$

beperkt tot:

$$\sum_{j=1}^{2} y_j \widehat{f_j}(x_i) + y_3 \geq \widehat{f_3}(x_i) \tag{5.48}$$

met

$$x_i = i * \frac{b}{k'}, i = 0, \dots, k' \tag{5.49}$$

$$\widehat{f_1}(x_i) = x_i \tag{5.50}$$

$$\widehat{f_2}(x_i) = x_i^2 \tag{5.51}$$

$$\widehat{f_3}(x_i) = (x_i - s)_+ \tag{5.52}$$

Het bovenstaande programma berekent de waarde voor de integraal beginnend van het bestelpunt tot oneindig $\int_s^\infty$. Maar aangezien dit deel focust op het tekort in backorders, moet de waarde voor de integraal bovenaan begrensd worden tot de bestelhoeveelheid q. Om de waarde voor deze integraal te bekomen wordt de integraal gaande van de bestelhoeveelheid q tot aan oneindig berekend en vervolgens afgetrokken van $\int_s^\infty$. Hierbij wordt verondersteld dat $q > s$.

$$\int_s^q [\quad] = \int_s^\infty [\quad] - \int_q^\infty [\quad] \tag{5.53}$$

Bij de berekening van de totale kosten wordt voor elke combinatie van (s, q) een oplossing bekomen. Deze berekening wordt uitgevoerd door eerst, met behulp van het lineair programma, voor een selectie van combinaties van (s, q) de waarde van $\int_s^q (x - s)f(x)dx$ uit te rekenen. Hierbij wordt telkens de bovengrens voor de waarde berekend aangezien deze het meest waardevol is vanuit het bedrijfsperspectief. Daarna wordt de totale kost berekend door middel van formule *(5.46)*.

5.3.2. Toepassing service-maatstaf drie

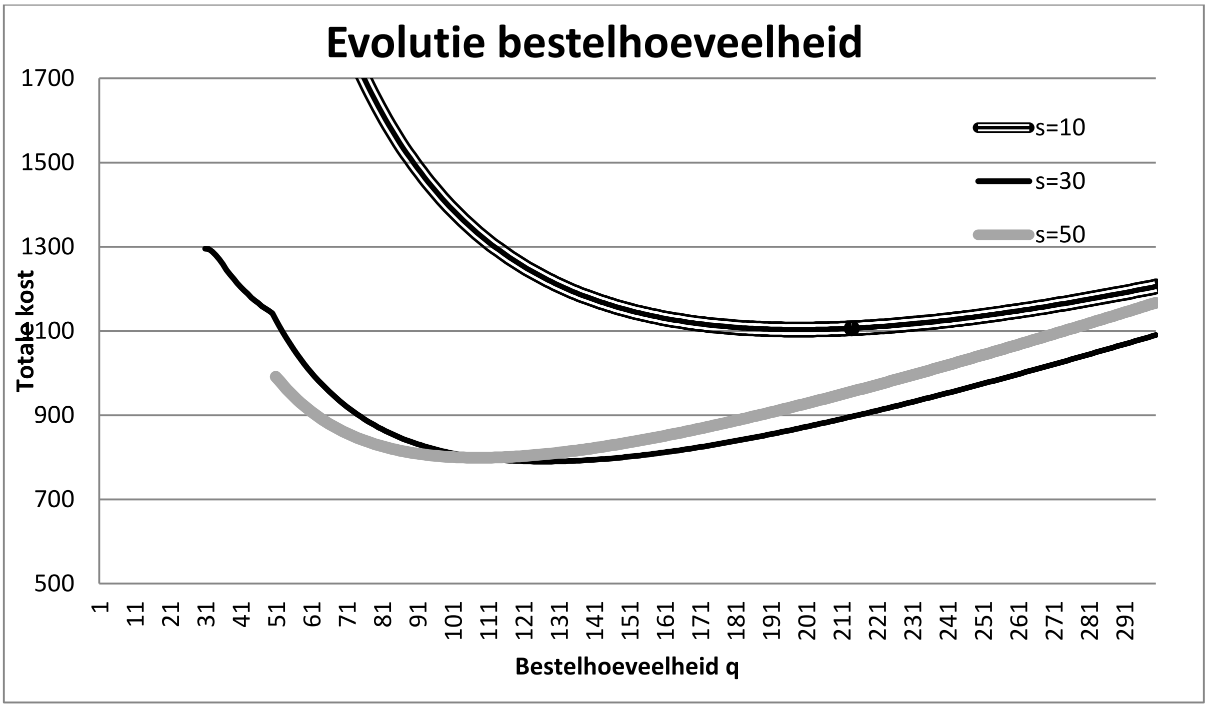
De gegevens die voor dit experiment gebruikt worden zijn de volgende:

- C_p = 24€/bestelling
- C_h = 6€/product/jaar
- C_s = 4€/product
- $E(D)$ =1300 producten/jaar
- m_1 = 25 producten
- m_2 =700 producten
- $s = [0,50]$
- $q = [1,300]$

De uitwerking van de geselecteerde combinaties gebeurt via Microsoft Excel. Als eerste wordt gekeken naar het verloop van de totale kosten indien het bestelpunt vooraf vastgelegd wordt en de bestelhoeveelheid kan variëren. De verloop hiervan is weergegeven in *figuur 5.*

Op de X-as staan de verschillende waardes voor de bestelhoeveelheid weergegeven. Op de Y-as staat de totale kost weergegeven als gevolg van de uitwerking van formule *(5.46)*. In de figuur is voor drie verschillende waardes van s de totale kost weergegeven in functie van de bestelhoeveelheid. De grafieken worden bekomen door de waarde van het bestelpunt vooraf te bepalen en vervolgens de bestelhoeveelheid te laten variëren. De drie waardes voor het bestelpunt in *figuur 5* zijn $s = 10$, $s = 30$ en $s = 50$. De bovenste grafiek in de figuur stemt overeen met de situatie waarbij het bestelpunt = 10. Vastgesteld kan worden dat de totale kosten hier voor elke waarde van q hoger zijn als voor de andere twee grafieken. Dit komt door de hoge kosten die resulteren uit het feit dat een bestelling pas geplaatst wordt indien het voorraadniveau onder 10 eenheden zakt terwijl de verwachte waarde van de vraag tijdens dezelfde periode gelijk is aan 25. Dit resulteert in een hoog verwachte aantal producten in backorders en bijgevolg hoge tekortkosten. De bestelhoeveelheid waarvoor de kosten geminimaliseerd worden indien het bestelpunt = 10 en is gelijk aan 199 eenheden per bestelling. De totale kost is hierbij gelijk aan 1103.3€. De dunne volle lijn geeft de evolutie van de totale kost weer indien het bestekpunt gelijk is aan 30. Door de veronderstelling dat de bestelhoeveelheid groter moet zijn als het bestelpunt begint de grafiek pas vanaf $q = 31$. De grafiek daalt in het begin als gevolg van de daling van de kosten door het aantal bestellingen dat afneemt. De minimale kost wordt bereikt voor de combinatie (s, q) = $(30,127)$. De totale kost is hierbij gelijk aan 789.74€. Ook kan vastgesteld worden dat, indien de bestelhoeveelheid > 108, s =30 best als bestelpunt wordt genomen aangezien de grafiek voor de totale kost op dit punt onder de grafiek van $s = 50$ duikt. De laatste grafiek is die van $s = 50$. Deze wordt weergegeven door een dikke volle lijn. De minimale kost wordt hier bereikt voor een bestelhoeveelheid gelijk aan 108 en bedraagt 799€.

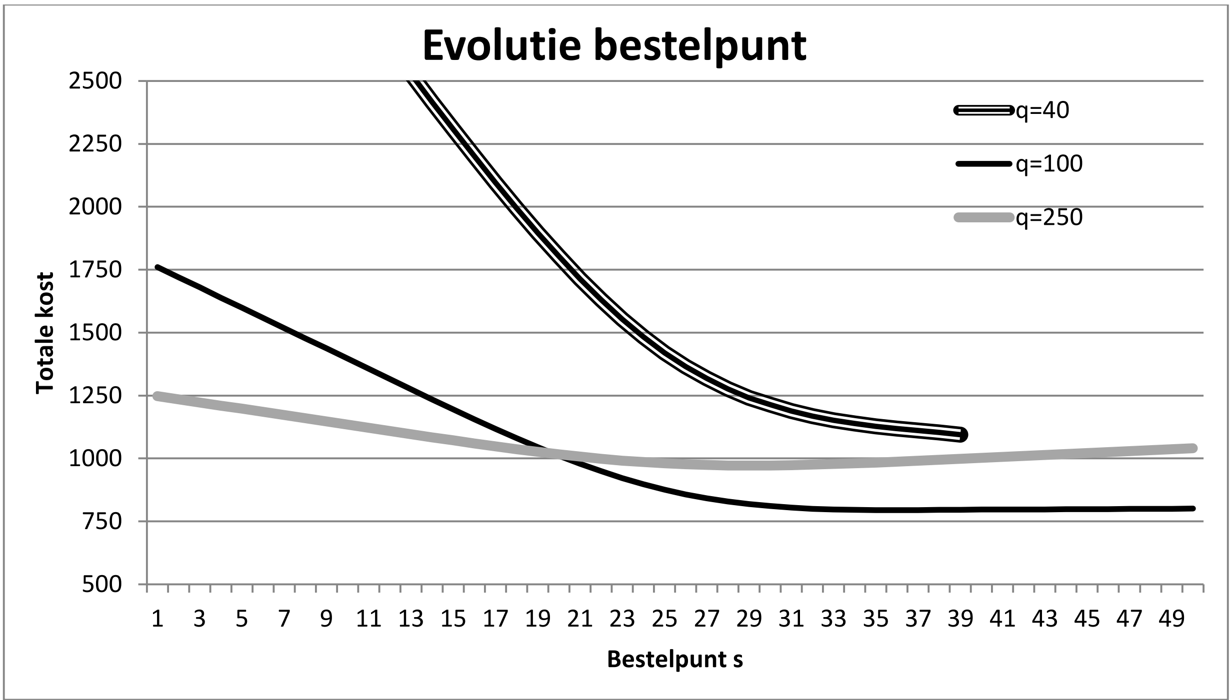
Figuur 5: Evolutie bestelhoeveelheid (s vast, q variabel)



Nu de evolutie van de totale kost geïllustreerd is bij een vooraf vastgelegd bestelpunt, wordt de evolutie van de totale kosten ook onderzocht voor de situatie waarbij de bestelhoeveelheid vooraf bepaald wordt en het bestelpunt kan variëren. De resultaten hiervan zijn weergegeven in *figuur 6*.

Als eerste kan opgemerkt worden dat de kosten zeer hoog oplopen indien een kleine bestelhoeveelheid gekozen wordt. Dit is het gevolg van de hoge tekortkosten die zich voordoen aangezien enerzijds de bestelhoeveelheid laag is waardoor vaak nieuwe bestellingen geplaatst worden en de kans op een tekort hierdoor toeneemt, en anderzijds door de veronderstelling dat $q > s$ wat wil zeggen dat voor de lage waardes van de bestelhoeveelheid een nog lager bestelpunt gekozen moet worden waardoor het verwachte aantal producten in backorders in elke bestelperiode oploopt met hogere tekortkosten tot gevolg. De tweede grafiek (dunne volle lijn) geeft de evolutie weer indien de bestelhoeveelheid vastgelegd wordt op 100 eenheden. Opgemerkt kan worden dat hoe hoger het bestelpunt wordt, hoe lager de totale kost wordt. Deze bereikt een minimale totale kost indien het bestelpunt gelijk is aan 36. De totale kost bedraagt hier 794.48€. Het snijpunt met de derde grafiek (dikke volle lijn), die waar de bestelhoeveelheid = 250, ligt tussen de 19 en 20. Indien de bestelhoeveelheid lager dan 20 moet zijn, kan best geopteerd worden voor een bestelhoeveelheid van 250 eenheden. Tot slot kan nog vastgesteld worden dat hoe hoger de waarde van de bestelhoeveelheid, hoe kleiner het bereik van de totale kost is. Dit komt door het feit dat de tekortkosten hier minder invloed hebben op de totale kosten aangezien ze minder kans hebben om voor te vallen aangezien door de hoge bestelhoeveelheid minder bestellingen plaatsvinden waarin een tekort kan optreden. Deze kost is ook de enige kost, die bij vooraf vastgelegde bestelhoeveelheid, in grote mate kan veranderen aangezien de voorraadkosten en bestelkosten hoofdzakelijk afhankelijk zijn van de bestelhoeveelheid die niet veranderd in dit geval.

Figuur 6: Evolutie bestelpunt (q vast, s variabel)



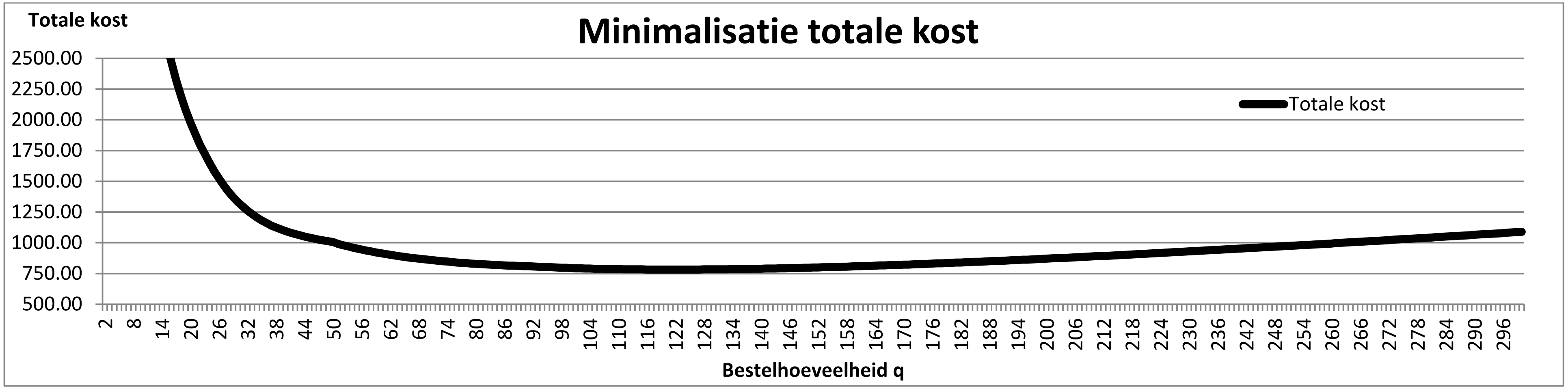
Hoewel de voorgaande grafieken handig kunnen zijn als bvb. gekozen moet worden tussen twee verschillende opties en welke hiervan de beste is of een combinatie van (s, q) gekozen moet worden waarbij de totale kost geminimaliseerd wordt in het geval dat het bestelpunt of de bestelhoeveelheid een bepaalde waarde moet hebben, is het voor een bedrijf meestal nuttiger een om de combinatie van het bestelpunt en bestelhoeveelheid te weten waarvoor de totale kost geminimaliseerd wordt uit alle mogelijke geselecteerde combinaties. Dit resultaat is weergegeven in *figuur 7* voor een bereik $[0,50]$ van het bestelpunt en een bereik $[0,300]$ voor de bestelhoeveelheid.

Deze grafiek geeft voor elke waarde van de bestelhoeveelheid de minimale totale kost die bekomen kan worden voor die bepaalde bestelhoeveelheid. De waardes in de grafiek zijn het resultaat van de vergelijking van alle mogelijke combinaties waarbij de bestelhoeveelheid vast gekozen wordt en het bestelpunt varieert. Hieruit wordt de laagst mogelijke kost gekozen en in de grafiek gezet. Bijvoorbeeld, stel de bestelhoeveelheid gelijk aan 140 eenheden, dan wordt voor een selectie van combinaties $[s, 140]$ $s \in [1,50]$ de totale kost berekend (zoals gedaan in *figuur 6*) en uit al de combinaties wordt de laagste totale kost gezocht en als waarde in de grafiek van *figuur 7* weergegeven. Deze methode wordt toegepast voor elke waarde van de bestelhoeveelheid wat uiteindelijk resulteert in de grafiek van *figuur 7*. *Figuur 8* geeft de overeenkomstige waarde van het bestelpunt weer waarvoor de minimale kost in figuur 7 bekomen wordt. Bijvoorbeeld, uit *figuur 7* blijkt dat de minimale totale kost voor een bestelhoeveelheid van 140 gelijk is aan 788.91€. Het bestelpunt waarbij deze minimale totale kost bekomen wordt, kan bepaald worden met behulp van *figuur 8* en stemt overeen met bestelpunt = 33. De combinatie (33,140) geeft dus de laagste totale kost indien de bestelhoeveelheid gelijk is aan 140.

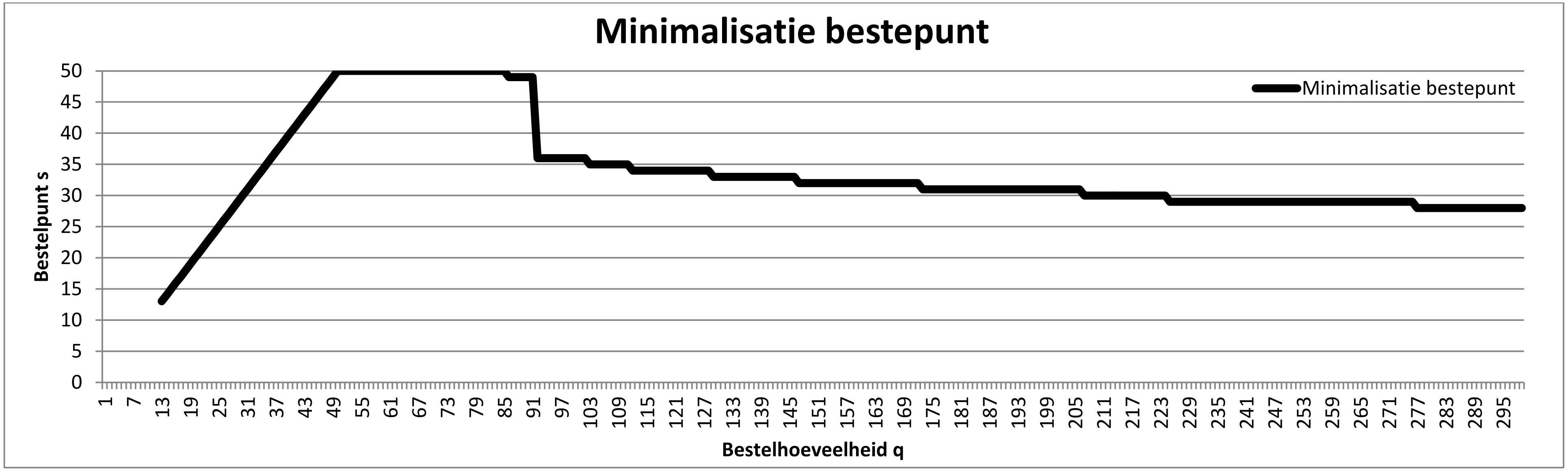
Bij de analyse van de resultaten kan geconcludeerd worden dat de absolute laagste kost bekomen wordt indien de waarde voor de bestelhoeveelheid gelijk is aan 121 eenheden. De totale kost bedraagt hier 781.86€. Uit figuur 8 blijkt dat deze kost bekomen wordt voor een bestelpunt van 34 eenheden. Een overzicht van de minimale totale kost voor elke bestelhoeveelheid samen met het overeenkomstige bestelpunt is terug te vinden in *bijlage 10*. Nu de combinatie gevonden is waarvoor de totale kost geminimaliseerd wordt, kan gekeken worden of de aangeboden service aan de klant ook voldoende hoog is.

Uit de *tabel 5.8* in *bijlage 11* kan gehaald worden dat het verwachte aantal tekort in backorders in een bestelperiode indien het bestelpunt gelijk is aan 34 eenheden overeenkomt met 1.74 eenheden. Indien het bedrijf geen strengere eisen dan 1.74 producten in backorder vooropstelt, wordt de combinatie (34,121) behouden. Is het bedrijf niet tevreden met de aangeboden service heeft dit een effect op de optimale oplossing. Stel dat het bedrijf vooropstelt dat het verwacht aantal tekort in backorder in een bestelperiode niet meer als één eenheid mag bedragen. Wat wordt dan de nieuwe optimale oplossing? Uit *tabel 5.8* in *bijlage 11* wordt gehaald dat het bestelpunt, indien het bedrijf een maximaal tekort van 1 eenheid per bestelperiode wenst, minstens gelijk moet zijn aan 41 eenheden. De nieuwe optimale oplossing wordt gevonden, eerst met behulp van *figuur 7* en *figuur 8* voor het gebied te bepalen waar de optimale oplossing zich bevindt. Hieruit blijkt dat de nieuwe optimale oplossing zich bevindt rond een bestelhoeveelheid van 90 eenheden. Uit *tabel 5.7* in *bijlage 10* kan vervolgens de exacte oplossing bekomen worden die gelijk is aan een bestelhoeveelheid van 92 eenheden een bestelpunt van 49 eenheden. De totale kost is hier gelijk aan 807.17€.

Figuur 7: Minimalisatie totale kost



Figuur 8: Minimalisatie bestelpunt



6. Algemene conclusie

Eén van de belangrijke doelen voor een bedrijf bestaat erin om een goede service aan de klant te bieden zonder dat het bedrijf hiervoor te hoge kosten van voorraad oploopt. Het bedrijf moet hierbij een evenwicht zoeken tussen de kosten van het houden van teveel voorraad en de kosten verbonden aan een eventuele stockbreuk. Voldoende aandacht moet dus besteed worden aan de bepaling van het voorraadniveau. Deze taak wordt moeilijker indien niet de volledige informatie geweten is over de vraag van de klant. Op deze situatie wordt dieper ingegaan in deze masterproef. De centrale onderzoeksvraag van deze masterproef is:

"Hoe een optimale voorraadbeslissing te nemen in een omgeving van onvolledige kennis van de vraag gedurende de levertijd?".

Om een antwoord op deze vraag te kunnen formuleren werden een reeks van deelvragen opgesteld. De eerste deelvraag richt zich op de consequenties van een tekort, meer specifiek, de verschillende manieren waarmee een bedrijf kan omgaan met een tekort. Hieruit blijkt dat een tekort op twee verschillende manieren verwerkt kan worden. De eerste manier is dat de producten die tekort zijn in de vorm van een backorder in een latere bestelperiode aan de klant geleverd worden. De tweede manier is dat de producten die tekort zijn niet meer aan de klant geleverd worden. De niet-afgeleverde producten aan de klant worden hier gezien als een verloren verkoop. Het bedrijf kan ook opteren voor een combinatie van deze twee manieren.

De tweede deelvraag gaat over de prestatiemaatstaven die logistieke managers allemaal gebruiken om een voorraadbeslissing te nemen. Zij gebruiken hiervoor optimalisatiemodellen die gebaseerd zijn op kost- of service-georiënteerde prestatiemaatstaven. Bij kost-georiënteerde prestatiemaatstaven wordt het niveau van het optimaal bestelpunt bepaald zodat de totale kosten (voorraadkosten, bestelkosten en tekortkosten) geminimaliseerd worden. Een nadeel aan deze methode is dat de tekortkosten in de kostenfunctie opgenomen worden terwijl deze kosten in realiteit moeilijk in te schatten zijn. Ze bestaan namelijk uit moeilijk kwantificeerbare zaken zoals bvb. het verlies van goodwill bij de klant. Een ander nadeel is dat het optimaal bestelpunt bij deze methode bepaald wordt in functie van de minimalisatie van de kosten zonder dat hiermee rekening gehouden wordt welke servicekwaliteit aan de klant aangeboden wordt. Daarom wordt vaak geopteerd om het voorraadniveau te bepalen aan de hand van service-georiënteerde prestatiemaatstaven. Hierbij wordt ook de minimalisatie van de kosten nagestreefd maar moet tegelijkertijd gezorgd worden dat een bepaald niveau van klantenservice gewaarborgd blijft. De tekortkosten worden hier ook niet in de kostenfunctie opgenomen maar zijn geïncorporeerd in de bepaling van het vooropgestelde serviceniveau dat aan de klant aangeboden moet worden. Omwille van bovenstaande redenen wordt in het verdere verloop van de masterproef gekozen voor de service-georiënteerde aanpak. Hierbij wordt gefocust op vier verschillende service-maatstaven namelijk: de fractie van het verwachte aantal producten dat op tijd geleverd wordt in een bestelperiode, de kans op geen tekort in een bestelperiode, de fractie van het verwachte aantal producten dat niet in backorder geleverd moet worden in een bestelperiode en de kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval voorvalt in een bestelperiode. Het bepalen van de optimale voorraadbeslissing wordt echter moeilijk indien niet alle karakteristieken van de verdeling van de vraag gekend zijn. Daartoe werd de derde deelvraag geïntroduceerd.

De derde deelvraag gaat over de verschillende manieren waarop het bestelpunt bepaald kan worden indien niet de volledige informatie over de verdeling van de vraag gekend is. Dit kan op twee manieren gedaan worden. De eerste manier is de bepaling van het bestelpunt op analytische wijze. Hier wordt door middel van wiskunde afleidingen, een formule uitgewerkt waardoor, gegeven een bepaald serviceniveau, het optimaal bestelpunt bepaald kan worden. Nadeel aan deze methode is dat het niet altijd mogelijk is een oplossing op analytische wijze te bekomen. Dit is bvb. het geval bij service-maatstaf vier waarbij, gegeven het eerste en tweede moment van de verdeling, geen analytische afleiding te vinden is voor de bepaling van het optimale bestelpunt. Door de beperkingen van de analytische methode wordt een alternatieve aanpak voorgesteld, namelijk lineaire programmering. Bij lineair programmeren wordt getracht een zo nauwkeurig mogelijke benadering te maken van de service-integraal. Dit gebeurt aan de hand van een model met verschillende beperkingen waaraan voldaan moet zijn. Deze aanpak heeft als voordeel dat ze problemen kan oplossen die analytisch niet opgelost kunnen worden. Voor elk van de service-maatstaven wordt een lineair programma uitgewerkt dat, gegeven het eerste-, tweede moment en het bereik van de verdeling, het optimale bestelpunt bepaald wordt waardoor voldaan wordt aan een bepaald vooropgesteld serviceniveau.

De volgende drie deelvragen hebben betrekking op het onderzoeksgedeelte van de masterproef. De vierde deelvraag handelt over de effectiviteit van de combinatie van verschillende service-maatstaven om het bestelpunt te bepalen. Hiertoe worden telkens twee verschillende service-maatstaven gecombineerd om het effect op het bestelpunt te onderzoeken. Dit resulteert in drie verschillende combinaties van service-maatstaven. Er wordt geconcludeerd dat de bepaling van het bestelpunt aan de hand van meerdere service-maatstaven tegelijk geen toegevoegde waarde heeft ten opzichte van de bepaling van het bestelpunt aan de hand van één service-maatstaf. De waarde van het bestelpunt die bekomen wordt aan de hand van meerdere service-maatstaven kon teruggebracht worden naar de waarde van het bestelpunt voor de bindende service-maatstaf.

De vijfde deelvraag gaat over het effect op het bestelpunt indien geweten is dat de verdeling unimodaal is en de unieke modus gekend is. Als eerste worden enkele sensitiviteitsanalyses uitgevoerd om het effect van de unimodaliteit te onderzoeken. Daaruit blijkt voor de onderzochte situatie dat, door de lage sensitiviteit ten opzichte van een verandering van de unieke modus, het belangrijker is om te weten of de verdeling unimodaal is dan de unieke modus van de verdeling te kennen. De sensitiviteit van het bereik op het optimaal bestelpunt wordt ook onderzocht. Hieruit blijkt, voor de onderzochte situatie, dat naarmate de modus hoger is, het bestelpunt minder snel toeneemt. Verder worden de resultaten voor het bestelpunt, in het geval dat geweten was dat de verdeling unimodaal is en de unieke modus gekend is, vergeleken met de resultaten voor het optimaal bestelpunt zonder de kennis van de unimodaliteit. Geconcludeerd wordt dat indien de unimodaliteit van de verdeling gekend is, het bestelpunt hoger ligt dan wanneer niet geweten is dat de verdeling unimodaal verdeeld is. Het effect werd ook onderzocht van het al dan niet kennen van het tweede moment, gegeven een unimodale verdeling en de unieke modus gekend is. Hieruit volgt uit de onderzochte situatie dat, enerzijds dat de kennis van het tweede moment leidt tot een lager niveau van het bestelpunt en anderzijds dat het verschil in bestelpunt tussen de twee situaties afneemt naarmate de variatie van de verdeling toeneemt. Een andere conclusie omtrent de waarde van het tweede moment is dat, afhankelijk van de waarde van het tweede moment, het bestelpunt kan stijgen of dalen naarmate de modus toeneemt. Als laatste wordt onderzocht welke parameter het beste gekend zou zijn indien enkel het eerste moment van de verdeling gekend was. De parameters die onderzocht worden waren enerzijds het tweede moment onder de veronderstelling dat niet geweten is of de verdeling unimodaal is en anderzijds de veronderstelling dat de verdeling unimodaal is en de unieke modus gekend is. Uit de analyse bleek dat de informatie over de waarde van het tweede moment geprefereerd wordt boven de informatie van de unieke modus van de verdeling.

De zesde deelvraag onderzocht de sensitiviteit van een verandering in één van de twee beslissingsvariabelen op enerzijds het bestelpunt en anderzijds de andere beslissingsvariabele. Uit de resultaten voor de onderzochte situatie bleek dat een minimale kost bekomen werd bij een bestelhoeveelheid gelijk aan 121 en een bestelpunt gelijk aan 34. De totale kost is hierbij gelijk 781.86€.

Lijst van geraadpleegde werken

Boeken

Chen, Y. (1996). *Service Level Constraints and Total Order Quantity Commitments in Inventory* Models. Thesis: University of Toronto

Hillier, F.S., & Lieberman, G.J. (2010). *Introduction to operations research*. New York: McGraw-Hill.

Hopp, W.J., Spearman, M.L. (2011). *Factory Physics*. Long Grove: Waveland.

Naddor, E. (1966). *Inventory systems*. New York: John Wiley & Sons.

Silver, E.A., Peterson, R., & Pyke, D.F. (1998). *Decision systems for inventory management and production planning*. New York: John Wiley and Sons Ltd.

Winston, W.L. (1994). *Operations research: applications and algorithms*. Belmont: Wadsworth.

Wetenschappelijke artikels

Adelson, R.M. (1966). Compound Poisson distributions [Elektronische versie]*. Operational Research Quarterly*, *17*, 73-75.

Axsäter, S. (1996). Using the deterministic EOQ formula in stochastic inventory control [Elektronische versie]. *Management science*, *42*, 830-834.

Bartezzaghi, E., Verganti, R., & Zotteri, G. (1999). Measuring the impact of asymmetric demand distributions on inventories [Elektronische versie]. *International Journal of Production Economics*, *60*, 395-404.

Bookbinder, J.H., & Tan, J.Y. (1988).Strategies for the probabilistic lot-sizing problem with service-level constraint [Elektronische versie]. *Managment Science*, *34*, 1096-1108.

Brockett, P.L., & Cox, S.H. (1985). Insurance calculations using incomplete information [Elektronische versie]. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2*, 94 -108.

Burgin, T.A. (1975). The Gamma distribution and inventory control [Elektronische versie]. *Operational Research Quarterly*, *26*, 507-525.

Chen, F.Y., & Krass, D. (2001). Inventory models with minimal service constraints [Elektronische versie]. *European Journal of Operational Research*, *134*, 120-140.

Cohen, M.A., Kleindorfer, P.R., & Lee, H. (1988). Service constrained (s,S) systems with priority demand classes and lost sales [Elektronische versie]. *Management Science*, *34*, 4482-4499.

Croston, J.D. (1972). Forecasting and stock control for intermittent demands [Elektronische versie]. *Operational Research Quarterly*, *23*, 289-303.

De Schepper, A., & Heijnen, B. (1995). General restrictions on tail probabilities [Elektronische versie]. Journal of *Computational and Applied Mathematics*, *64*, 177-188.

De Vylder, F., & Goovaerts, M. (1982). Analytical best upper bounds on stop-loss premiums [Elektronische versie]. *Insurance: Mathematics and Economics*, *1*, 163-175.

De Vylder, F., Goovaerts, M., & De Pril, N. (1982). Bounds on Modified Stop-Loss Premiums in Case of Known Mean and Variance of the Risk Variable [Elektronische versie]. *Astin Bulletin*, *13*, 23-36.

Diks, E.B., de Kok, A.G., & Lagodimos, B. (1996). Multi-echelon systems: A service measure perspective [Elektronische versie]. *European Journal of Operational Research*, *95*, 241-263.

Dullaert, W., Vernimmen, B., Aghezzaf, E.H., & Raa, B. (2007). Revisiting Service- level Measurement for an Inventory System with Different Transport Modes [Elektronische versie]. *Transport Reviews*, *27*, 273-283.

Dunsmuir, W.T.M., & Snyder, R.D. (1989). Control of inventories with intermittent demand [Elektronische versie]. *European Journal of Operational Research*, *40*, 16-21.

Fortuin, L. (1980). Five popular probability density functions: A comparison in the field of stock control models [Elektronische versie]. *The Journal of the Operational Research Society*, *31*, 937-942.

Friend, J.K. (1960). Stock control with random opportunities for replenishment [Elektronische versie]. *Operational Research Quarterly*, *11*, 130-136.

Gavirneni, S., & Tayur, S. (2001). An efficient procedure for nonstationary inventory control [Elektronische versie]. *IIE Transactions*, *33*, 83–89.

Goovaerts, M.J., Haezendonck, J., & De Vylder, F. (1982). Numerical best bounds on stop-loss premiums [Elektronische versie]. *Insurance: Mathematics and Economics*, *1*, 287-302.

Goovaerts, M.J., de Vylder, F., & Haezendonck, J. (1984). Insurance Premiums [Elektronische versie]. *Journal of the Institute of Actuaries*, *111*, 577-578.

Heijnen, B. (1990). Best upper and lower bounds on modified stop loss premiums in case of known range, mode, mean and variance of the original risk [Elektronische versie]. *Insurance: Mathematics and Economics*, *9*, 207-220.

Heijnen, B., & Goovaerts, M.J. (1986). Bounds on modified stop-loss premiums in case of unimodal distributions [Elektronische versie]. *European Journal of Operational Research*, *1*, 546-557.

Heijnen, B., & Goovaerts, M.J. (1989). Best upper bounds on risks altered by deductibles under incomplete information [Elektronische versie]. *Scandinavian Actuarial Journal*, *4*, 23-26.

Iida, T., 1999. The infinite horizon non-stationary stochastic inventory problem: Near myopic policies and weak ergodicity [Elektronische versie]. *European Journal of Operational Research*, *116*, 405–422.

IMA journal of Management mathematics (2014). Decision support for inventory models with partial information on unimodal demand lead-time distributions. (Unplublished manuscript), Oxford, 1-19.

Jansen, K., Haezendonck, J., & Goovaerts, M.J. (1986). Upper bounds on stop-loss premiums in case of known moments up to the fourth order [Elektronische versie]. *Insurance: Mathematics and Economics*, *5*, 315-334.

Janssens, G.K., & Ramaekers, K.M. (2011). A lineair programming formulation for an inventory management decision problem with a service constraint [Elektronische versie]. *Expert Systems with Applications*, *38*, 7929-7934.

Jansen, K., Haezendonck, J., & Goovaerts, M.J. (1986). Upper bounds on stop-loss premiums in case of known moments up to the fourth order [Elektronische versie]. *Insurance: Mathematics and Economics*, *5*, 315-334.

Janssens, G.J., Ramaekers, K.M., & Verdonck, L. (2013). Linear programming models to support inventory decision-making in the case of incomplete information on demand during lead-time [Elektronische versie]. *East-West Journal of Mathematics*, *15*, 109-126.

Lee, H.L., & Nahmias, S. (1993). Single-product, single-location models [Elektronische versie]. *Operations research and Management Science*, *4*, 3-57.

Naddor, E. (1978). Sensitivity to distributions in inventory systems [Elektronische versie]. *Management Science*, *24*, 1769-1772.

Ramaekers, K., & Janssens, G.K. (2012). The choice of a demand distribution for inventory management models [Elektronische versie]. *European Journal of Industrial Engineering*, *2*, 479-491.

Ramaekers, K., & Janssens, G.K. (2012). Service-oriented decisions on inventory levels in the case of incomplete demand information [Elektronische versie]. *Logistics Research*, *5*, 33-46.

Rosling, K. (1997). Inventory cost rate functions with nonlinear shortage cost [Elektronische versie]. *Operations Research*, *50*, 1007-1017.

Sankarasubramanian, E., & Kumaraswamy, S. (1983). Note on optimal ordering quantity to realize a pre-determined level of profit [Elektronische versie]. *Management Science*, *29*, 512-514.

Schneider, H. (1981). Effect of service-level on order–point or order-level in inventory models [Elektronische versie]. *International Journal of Production research*, *19*, 615-631.

Sobel, M.J., & Zhang, R.Q. (2001). Inventory policies for systems with stochastic and deterministic demand [Elektronische versie]. *Operations Research*, *49*, 157–162.

Tarim, S.A., & Kingsman, B.G. (2004). The stochastic dynamic production/inventory lot-sizing problem with service-level constraints [Elektronische versie]. *International Journal of Production Economics*, *88*, 105-119.

Van der Heijden, M. (2000). Near cost-optimal inventory control policies for divergent networks under fill rate constraints [Elektronische versie]. *International Journal of Production Economics*, *63*, 161-179.

Van Houtum, G.J., & Zijm, W.H.M. (2000). On the relation between cost and service models for general inventory systems [Elektronische versie]. *Statistica Neerlandica*, *54*, 127-147.

Zheng, Y.S. (1992). On properties of stochastic systems [Elektronische versie]. *Management Science*, *38*, 87-103.

Bijlagen

Bijlage 1: Tabel van de standaard normaalverdeling $F(Z)$ en standaard verlies functie $L(Z)$

Table for a Normal Distribution

TABLE A5.1 Areas under the normal curve from K_α to ∞

$$P\{\text{standard normal} > K_\alpha\} = \int_{K_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \alpha$$

K_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139

$F(Z)$ is de kans dat een variabele die een standaard normaalverdeling volgt, groter is als Z, of andersom, het service level voor een bestelling die een bepaalde z-waarde van Z heeft.

Tabel: Standaard verlies functie $L(Z)$:

	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.3989	0.3940	0.3890	0.3841	0.3793	0.3744	0.3697	0.3649	0.3602	0.3556
0.1	0.3509	0.3464	0.3418	0.3373	0.3328	0.3284	0.3240	0.3197	0.3154	0.3111
0.2	0.3069	0.3027	0.2986	0.2944	0.2904	0.2863	0.2824	0.2784	0.2745	0.2706
0.3	0.2668	0.2630	0.2592	0.2555	0.2518	0.2481	0.2445	0.2409	0.2374	0.2339
0.4	0.2304	0.2270	0.2236	0.2203	0.2169	0.2137	0.2104	0.2072	0.2040	0.2009
0.5	0.1978	0.1947	0.1917	0.1887	0.1857	0.1828	0.1799	0.1771	0.1742	0.1714
0.6	0.1687	0.1659	0.1633	0.1606	0.1580	0.1554	0.1528	0.1503	0.1478	0.1453
0.7	0.1429	0.1405	0.1381	0.1358	0.1334	0.1312	0.1289	0.1267	0.1245	0.1223
0.8	0.1202	0.1181	0.1160	0.1140	0.1120	0.1100	0.1080	0.1061	0.1042	0.1023
0.9	0.1004	0.0986	0.0968	0.0950	0.0933	0.0916	0.0899	0.0882	0.0865	0.0849
1.0	0.0833	0.0817	0.0802	0.0787	0.0772	0.0757	0.0742	0.0728	0.0714	0.0700
1.1	0.0686	0.0673	0.0659	0.0646	0.0634	0.0621	0.0609	0.0596	0.0584	0.0573
1.2	0.0561	0.0550	0.0538	0.0527	0.0517	0.0506	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465
1.3	0.0455	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0400	0.0392	0.0383	0.0375
1.4	0.0367	0.0359	0.0351	0.0343	0.0336	0.0328	0.0321	0.0314	0.0307	0.0300
1.5	0.0293	0.0286	0.0280	0.0274	0.0267	0.0261	0.0255	0.0249	0.0244	0.0238
1.6	0.0232	0.0227	0.0222	0.0216	0.0211	0.0206	0.0201	0.0197	0.0192	0.0187
1.7	0.0183	0.0178	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146
1.8	0.0143	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0123	0.0119	0.0116	0.0113
1.9	0.0111	0.0108	0.0105	0.0102	0.0100	0.0097	0.0094	0.0092	0.0090	0.0087
2.0	0.0085	0.0083	0.0080	0.0078	0.0076	0.0074	0.0072	0.0070	0.0068	0.0066
2.1	0.0065	0.0063	0.0061	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0052	0.0050
2.2	0.0049	0.0047	0.0046	0.0045	0.0044	0.0042	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038
2.3	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028
2.4	0.0027	0.0026	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021
2.5	0.0020	0.0019	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015
2.6	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011
2.7	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008
2.8	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
2.9	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004
3.0	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.1	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.2	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.3	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.4	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.5	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$L(Z)$ is de standaard verlies functie, m.a.w. het verwachte aantal verloren verkopen (lost sales) als een deel van de standaard afwijking. De verloren verkopen worden dan berekend door = $L(Z)\ x\ \sigma_{vraag}$

Bijlage 2: Bepaling boven- en ondergrens service–maatstaf één

In deze bijlage worden de formules gegeven voor het bepalen van de boven- en ondergrens voor het verwachte aantal producten tekort alsook de formules voor het optimaal voorraadniveau gegeven een bepaald vooropgesteld doel. Hiervoor moet de volgende informatie beschikbaar zijn:

- Het bereik van de verdeling van de vraag
- De verwachte waarde van het aantal stock-out producten
- Het tweede moment of de variantie van de verdeling

verder moet $m_1$en m_2 gekozen worden zodat de volgende 2 vergelijkingen opgaan:

$0 \leq m_1 \leq b$

${m_1}^2 \leq m_2 \leq m_1 b$

vervolgens wordt r' bepaald door $r' = \frac{(m_2 - m_1 r)}{(m_1 - r)}$ voor elke $r \in [0, b]\ en\ r \neq m_1$. Als hieraan voldaan is, kan de boven- en ondergrens berekend worden.

Tabellen 4.1 en *4.2* geven respectievelijk de boven- en ondergrens voor het verwachte aantal producten tekort indien het voorraadniveau gelijk is aan s aan het begin van de levertijd. In *tabellen 4.3* en *4.4* worden de optimale waarde van de boven en ondergrens voor het voorraadniveau weergegeven indien de beslissingsnemer een bepaald serviceniveau vooropstelt.

Tabel 4.1: Bovengrens verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode

Voorwaarde	Bovengrens
$s \leq \frac{0'}{2}$	$\frac{m_1}{m_2}(m_2 - m_1 s)$
$\frac{0'}{2} < s \leq \frac{b + b'}{2}$	$\frac{m_1 - s + \sqrt{(m_2 - {m_1}^2) + (s - m_1)^2}}{2}$
$s > \frac{b + b'}{2}$	$\frac{(m_2 - {m_1}^2)(b - s)}{(m_2 - {m_1}^2) + (b - m_1)^2}$

Tabel 4.2: Ondergrens verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode

Voorwaarde	Ondergrens
$0 \leq s \leq b'$	$m_1 - s$
$b' < s \leq 0'$	$\frac{m_2 - m_1 s}{\mathrm{b}}$
$0' < s \leq b$	0

Tabel 4.3: Optimaal voorraadniveau verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode (Bovengrens)

Voorwaarde	Voorraadniveau
$\boldsymbol{E(w) \leq \frac{(m_2 - m_1^2)}{2(b - m_1)}}$	$\boldsymbol{b - \frac{(E(w)[(m_2 - m_1^2) + (b - m_1)^2]}{m_2 - m_1^2}}$
$\boldsymbol{\frac{(m_2 - m_1^2)}{2(b - m_1)} < E(w) \leq \frac{m_1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{(m_2 - m_1^2) - 4E(w)^2 + 4E(w)m_1}{4E(w)}}$
$\boldsymbol{E(w) > \frac{m_1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{(m_1 - E(w))m_2}{m_1^2}}$

Tabel 4.4: Optimaal voorraadniveau verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode (Ondergrens)

Voorwaarde	Voorraadniveau
$\boldsymbol{E(w) \leq \frac{(m_2 - m_1^2)}{(b - m_1)}}$	$\boldsymbol{\frac{m_2 - bE(w)}{m_1}}$
$\boldsymbol{E(w) > \frac{(m_2 - m_1^2)}{2(b - m_1)}}$	$\boldsymbol{m_1 - E(w)}$

Waarbij $0' = \frac{m_2 - (m_1 * a_0)}{m_1 - a_0}$, $b' = \frac{m_2 - (m_1 * b_0)}{m_1 - b_0}$ en $E(w)$ gelijk is aan het vooropgesteld doel voor het verwachte aantal producten tekort. De formule voor de berekening $E(w) = q * (1 - S_1)$

Bijlage 3: Bepaling boven- en ondergrens service-maatstaf twee

In deze bijlage worden de formules gegeven voor het bepalen van de boven- en ondergrens voor de verwachte kans op geen tekort alsook de formules voor het optimaal voorraadniveau gegeven een bepaald vooropgesteld doel. Hiervoor moet de volgende informatie beschikbaar zijn:

- Het bereik van de verdeling van de vraag
- De verwachte waarde van de kans op geen tekort
- Het tweede moment of de variantie van de verdeling

verder moet m_1 en m_2 gekozen worden zodat de volgende 2 vergelijkingen opgaan:

$0 \leq m_1 \leq b$

$m_1^2 \leq m_2 \leq m_1 b$

vervolgens wordt r' bepaald door $r' = \frac{(m_2 - m_1 r)}{(m_1 - r)}$ voor elke $r \in [0, b]\ en\ r \neq m_1$. Als hieraan voldaan is kan de boven- en ondergrens berekend worden voor de verwachte kans op geen tekort in een bestelperiode indien een bepaald voorraadniveau gekozen wordt. Deze formules zijn terug te vinden in *tabellen 4.5* en *4.6*. De formules voor het bepalen van het optimale voorraadniveau gegeven een bepaalde kans op geen tekort zijn terug te vinden in *tabellen 4.7* en *4.8*.

Tabel 4.5: Bovengrens verwachte kans op geen tekort in een bestelperiode

Voorwaarde	Bovengrens
$0 \leq s \leq b'$	0
$b' < s \leq 0'$	$1 - \frac{(b+s)m_1 - m_2}{bs}$
$0' < s < b$	$1 - \frac{(m_2 - m_1^2)}{(m_2 - m_1^2) + (m_1 - s)^2}$
$s = b$	1

Tabel 4.6: Ondergrens verwachte kans op geen tekort in een bestelperiode

Voorwaarde	Ondergrens
$0 \leq s \leq b'$	$1 - \frac{(m_1 - s)^2}{(m_2 - m_1^2) + (m_1 - s)^2}$
$b' < s \leq 0'$	$1 - \frac{m_2 - sm_1}{b(b-s)}$
$0' < s < b$	1
$s = b$	1

Tabel 4.7: Optimaal voorraadniveau verwachte kans op geen tekort in een bestelperiode (Bovengrens)

Voorwaarde	Voorraadniveau
$E(1 - S_2) < \frac{(m_2 - m_1^2)}{b^2 - 2bm_1 + m_2}$	b
$\frac{(m_2 - m_1^2)}{b^2 - 2bm_1 + m_2} \leq E(1 - S_2) \leq \frac{m_1^2}{m_2}$	$\frac{m_1 E(1 - S_2) + \sqrt{\left(E(1 - S_2)^2 - E(1 - S_2)\right)(m_1^2 - m_2)}}{E(1 - S_2)}$
$E(1 - S_2) > \frac{m_1^2}{m_2}$	$\frac{bm_1 - m_2}{bE(1 - S_2) - m_1}$

Tabel 4.8: Optimaal voorraadniveau verwachte kans op tekort in een bestelperiode (Ondergrens)

Voorwaarde	Voorraadniveau
$E(1 - S_2) \geq \frac{(m_2 - m_1^2)}{b^2 - 2bm_1 + m_2}$	$\frac{m_1(E(1 - S_2) - 1) + \sqrt{m_1^2(E(1 - S_2) - 1)^2 - (E(1 - S_2) - 1)(m_2 E(1 - S_2) - n}}{E(1 - S_2) - 1}$
$\frac{(m_2 - m_1^2)}{b^2 - 2bm_1 + m_2} < E(1 - S_2)$	$\frac{m_2 - E(1 - S_2)b^2}{m_1 - E(1 - S_2)b}$

Waarbij $0' = \frac{m_2 - (m_1 * a_0)}{m_1 - a_0}$ en $b' = \frac{m_2 - (m_1 * b_0)}{m_1 - b_0}$.

Bijlage 4: Bepaling boven- en ondergrens service-maatstaf drie

In deze bijlage worden de formules gegeven voor het bepalen van de boven- en ondergrens voor het verwachte aantal tekort in backorders. Hiervoor moet de volgende informatie beschikbaar zijn:

- Het bereik van de verdeling van de vraag
- De verwachte waarde van het aantal producten in backorders
- Het tweede moment of de variantie van de verdeling

verder moet m_1 en m_2 gekozen worden zodat de volgende vergelijkingen opgaan:

$a \leq m_1 \leq b$ en $a \leq s \leq q \leq b$

$0 \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(b - m_1)$ met $\sigma^2 = m_2 - {m_1}^2$

$s_{my_1} = \sigma^2 + (s - m_1)$ en $s_{my_2} = \sigma^2 + (m_1 - q)$

Als hieraan voldaan is kan de boven- en ondergrens berekend worden voor het verwachte aantal tekort in backorders . Deze formules zijn terug te vinden in *tabel 4.9* en *4.10*.

Tabel 4.9: Bovengrens verwachte aantal tekort in backorders in een bestelperiode

Voorwaarde	Bovengrens
$a \leq m_1 < q$ $(m_1 - a)(q - m_1) \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(b - m_1)$	$(q - s)\dfrac{(m_1 - a)(b + q - m_1 - a) - \sigma^2}{(b - a)(q - a)}$
$q \leq m_1 \leq b$ $(m_1 - q)(b - m_1) \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(b - m_1)$	$(q - s)\dfrac{(m_1 - a)(b + q - m_1 - a) - \sigma^2}{(b - a)(q - a)}$
$q \leq m_1 \leq b$ $0 \leq \sigma^2 \leq (m_1 - q)(b - m_1)$	$q - s$
Geval 1: $2s - a < q$	
$a \leq m_1 < 2s - a$ $0 \leq \sigma^2 < (2s - a - m_1)(m_1 - a)$	$\frac{1}{2}(m_1 - s + s_{my_1})$
$a \leq m_1 < 2s - a$ $(2s - a - m_1)(m_1 - a) \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(q - m_1)$	$m_1 - a - \dfrac{(s - a)(m_1 - a)^2}{\sigma^2 + (m_1 - a)^2}$
$2s - a \leq m_1 \leq q$ $0 \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(q - m_1)$	$m_1 - a - \dfrac{(s - a)(m_1 - a)^2}{\sigma^2 + (m_1 - a)^2}$
Geval 2: $2s - a \geq q$	
$2s - q \leq m_1 \leq q$ $0 \leq \sigma^2 < (m_1 - 2s + q)(q - m)$	$\frac{1}{2}(m_1 - s + s_{my_1})$
$2s - q \leq m_1 \leq q$ $(m_1 - 2s + q)(q - m) \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(q - m_1)$	$(q - s)\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + (m_1 - q)^2}$
$a \leq m_1 < 2s - q$ $0 \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(q - m_1)$	$(q - s)\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + (m_1 - q)^2}$

Tabel 4.10: Ondergrens verwachte aantal tekort in backorders in een bestelperiode

Voorwaarde	Ondergrens
$a \leq m_1 \leq s$ $(m_1 - a)(s - m_1) \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(b - m_1)$	$(q-s)\dfrac{\sigma^2 + (m_1 - a)(m_1 - s)}{(b-a)(b-s)}$
$s \leq m_1 \leq b$ $(m_1 - s)(b - m_1) \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(b - m_1)$	$(q-s)\dfrac{(m_1 - a)(b + q - m_1 - a) - \sigma^2}{(b-a)(q-a)}$
$a \leq m_1 \leq s$ $0 \leq \sigma^2 \leq (m_1 - a)(s - m_1)$	0
Geval 1: $2q - s < b$	
$s \leq m_1 < 2q - s$ $0 \leq \sigma^2 < (m_1 - s)(2q - s - m_1)$	$\frac{1}{2}(q + m_1 - 2s + s_{my2})$
$s \leq m_1 < 2q - s$ $(m_1 - s)(2q - s - m_1) \leq \sigma^2 \leq (m_1 - s)(b - m_1)$	$(q-s)\dfrac{(m_1 - s)^2}{\sigma^2 + (m_1 - s)^2}$
$2q - s \leq m_1 \leq b$ $0 \leq \sigma^2 \leq (m_1 - s)(b - m_1)$	$(q-s)\dfrac{(m_1 - s)^2}{\sigma^2 + (m_1 - s)^2}$
Geval 2: $2q - s \geq b$	
$2q - b < m_1 \leq b$ $0 \leq \sigma^2 < (m_1 - 2q + b)(b - m)$	$\frac{1}{2}(q + m_1 - 2s + s_{my2})$
$2q - b < m_1 \leq b$ $(m_1 - 2q + b)(b - m) \leq \sigma^2 \leq (m_1 - s)(b - m)$	$(q - s)) + (m_1 - b)\dfrac{\sigma^2 + (m_1 - q)(m_1 - b)}{\sigma^2 - (m_1 - b)^2}$
$s \leq m_1 \leq 2q - b$ $0 \leq \sigma^2 \leq (m_1 - s)(b - m)$	$(q - s)) + (m_1 - b)\dfrac{\sigma^2 + (m_1 - q)(m_1 - b)}{\sigma^2 - (m_1 - b)^2}$

De waarde voor S_3 kan hierna gemakkelijk gevonden worden door:

$$S_3 = 1 - \frac{aantal\ tekort\ in\ backorder}{q}$$

Bijlage 5: Bepaling boven- en ondergrens service-maatstaf vier

In deze bijlage worden de formules gegeven voor het bepalen van de boven- en ondergrens voor de kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval voorvalt in een bestelperiode. Hiervoor moet de volgende informatie beschikbaar zijn:

- Het bereik van de verdeling van de vraag
- De waardes van het interval t_1 en t_2
- De verwachte vraag van de verdeling $E(X) = m_1$

Verder moet gelden dat $a \leq t_1 < t_2 \leq b$

Als hieraan voldaan is kan de boven- en ondergrens voor de kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval voorvalt in een bestelperiode bekomen worden aan de hand van *tabellen 4.11* en *4.12*.

Tabel 4.11: Bovengrens kans tussen twee waarden t_1 en t_2 in een bestelperiode

Voorwaarde	Bovengrens
$\boldsymbol{m_1 < t_1}$	$\boldsymbol{\frac{m_1}{t_1}}$
$\boldsymbol{t_1 \leq m_1 \leq t_2}$	$\mathbf{1}$
$\boldsymbol{t_2 < m_1}$	$\boldsymbol{\frac{b - m_1}{b - t_2}}$

Tabel 4.12: Ondergrens kans tussen twee waarden t_1 en t_2 in een bestelperiode

Voorwaarde	Bovengrens
$\boldsymbol{m_1 < t_1}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{t_1 \leq m_1 \leq t_2}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{t_2 < m_1}$	$\mathbf{0}$

Bijlage 6: Voorbeeld van een lineair programma voor service-maatstaf één

In deze bijlage staat een voorbeeld van een uitgeschreven model in Lingo voor de bepaling van de optimale veiligheidsvoorraad gegeven een bepaald vooropgesteld verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode

De gegevens voor dit model zijn:

Interval $[a, b] = [0,50]$
Eerste moment $m_1 = 30$ en tweede moment $m_2 = 925$
Het maximum verwachte aantal producten tekort in een bestelperiode $m_3 = 5$
Aantal evaluatiepunten $k' = 10$

Het lineair programma voor de optimale veiligheidsvoorraad te berekenen is gelijk aan:

```
model:
min=s;
!beperking dat we met een kansverdeling bezig zijn;
P1+P2+P3+P4+P5+P6+P7+P8+P9+P10+P11=1;
!beperkingen voor de gekende karakteristieken van de verdeling;
0*P1+5*P2+10*P3+15*P4+20*P5+25*P6+30*P7+35*P8+40*P9+45*P10+50*
P11=30;
0*P1+25*P2+100*P3+225*P4+400*P5+625*P6+900*P7+1225*P8+1600*P9+
2025*P10+2500*P11=925;
!beperking om te zorgen dat maar 1 evaluatiepunt gekozen wordt;
Y1+Y2+Y3+Y4+Y5+Y6+Y7+Y8+Y9+Y10+Y11=1;
!beperkingen voor de link tussen Y en s;
s>0;
s-5*Y2>0;
s-10*Y3>0;
s-15*Y4>0;
s-20*Y5>0;
s-25*Y6>0;
s-30*Y7>0;
s-35*Y8>0;
s-40*Y9>0;
s-45*Y10>0;
s-50*Y11>0;
!Beperkingen om de keuze van het evaluatiepunt te bepalen;
5*P2+10*P3+15*P4+20*P5+25*P6+30*P7+35*P8+40*P9+45*P10+50*P11+2
5*Y1<=30;
5*P3+10*P4+15*P5+20*P6+25*P7+30*P8+35*P9+40*P10+45*P11+25*Y2<=
30;
5*P4+10*P5+15*P6+20*P7+25*P8+30*P9+35*P10+40*P11+25*Y3<=30;
5*P5+10*P6+15*P7+20*P8+25*P9+30*P10+35*P11+25*Y4<=30;
5*P6+10*P7+15*P8+20*P9+25*P10+30*P11+25*Y5<=30;
5*P7+10*P8+15*P9+20*P10+25*P11+25*Y6<=30;
5*P8+10*P9+15*P10+20*P11+25*Y7<=30;
5*P9+10*P10+15*P11+25*Y8<=30;
```

```
5*P10+10*P11+25*Y9<=30;
5*P11+25*Y10<=30;
25*Y11<=30;
@bin(Y1);@bin(Y2);@bin(Y3);@bin(Y4);@bin(Y5);@bin(Y6);@bin(Y7);@bin(Y8);
@bin(Y9);
@bin(Y10);@bin(Y11);
End
```

waarbij

P_i = De kans op evaluatiepunt i $(i = 1 \ldots 11)$

$Y_i = \begin{Bmatrix} 1 \, als \, Y_i \, als \, evaluatiepunt \, gekozen \, wordt \, anders, \\ 0 \end{Bmatrix}, (i = 1 \ldots 11)$

s = Het bestelpunt

Bijlage 7: Voorbeeld van een Lineair programma voor service-maatstaf twee

In deze bijlage staat een voorbeeld van een uitgeschreven model in Lingo voor de bepaling van de optimale veiligheidsvoorraad gegeven een bepaald vooropgesteld niveau van de kans op een tekort.

De gegevens voor dit model zijn:

Interval $[a, b] = [0,50]$

Eerste moment $m_1 = 30$ en tweede moment $m_2 = 925$

Kans op een tekort in een bestelperiode $m_4 = 15\%$

Aantal evaluatiepunten $k' = 10$

Het lineair programma voor de optimale veiligheidsvoorraad te berekenen is gelijk aan:

```
model:
min=s;
!beperking stelt dat totale massa van een kansverdeling is;
P1+P2+P3+P4+P5+P6+P7+P8+P9+P10+P11=1;
!beperkingen voor de momenten van de verdeling die gekend zijn;
0*P1+5*P2+10*P3+15*P4+20*P5+25*P6+30*P7+35*P8+40*P9+45*P10+50*
P11=30;
0*P1+25*P2+100*P3+225*P4+400*P5+625*P6+900*P7+1225*P8+1600*P9+
2025*P10+2500*P11=925;
!beperking die zorgt dat slechts 1 evaluatiepunt gekozen wordt;
Y1+Y2+Y3+Y4+Y5+Y6+Y7+Y8+Y9+Y10+Y11=1;
!Beperkingen met betrekking tot de link tussen Y en s;
s>0;
s-5*Y2>0;
s-10*Y3>0;
s-15*Y4>0;
s-20*Y5>0;
s-25*Y6>0;
s-30*Y7>0;
s-35*Y8>0;
```

```
s-40*Y9>0;
s-45*Y10>0;
s-50*Y11>0;
!Beperkingen om de keuze van het evaluatiepunt te bepalen;
P2+P3+P4+P5+P6+P7+P8+P9+P10+P11+0.85*Y1<=1;
P3+P4+P5+P6+P7+P8+P9+P10+P11+0.85*Y2<=1;
P4+P5+P6+P7+P8+P9+P10+P11+0.85*Y3<=1;
P5+P6+P7+P8+P9+P10+P11+0.85*Y4<=1;
P6+P7+P8+P9+P10+P11+0.85*Y5<=1;
P7+P8+P9+P10+P11+0.85*Y6<=1;
P8+P9+P10+P11+0.85*Y7<=1;
P9+P10+P11+0.85*Y8<=1;
P10+P11+0.85*Y9<=1;
P11+0.85*Y10<=1;
0.85*Y11<=1;
@bin(Y1);@bin(Y2);@bin(Y3);@bin(Y4);@bin(Y5);@bin(Y6);@bin(Y7);@bin(Y8);
@bin(Y9);
@bin(Y10);@bin(Y11);
End
```

waarbij

P_i = De kans op evaluatiepunt i $(i = 1 \ldots 11)$

$Y_i = \begin{cases} 1 \; als \; Y_i \; als \; evaluatiepunt \; gekozen \; wordt \; anders, \\ \qquad\qquad 0 \end{cases}, (i = 1 \ldots 11)$

s = Het bestelpunt

Bijlage 8: Voorbeeld van een lineair programma voor service-maatstaf drie

In deze bijlage staat een voorbeeld van een uitgeschreven model in Lingo voor de bepaling van de optimale veiligheidsvoorraad gegeven een bepaald vooropgesteld verwachte aantal producten in backorders in een bestelperiode.

De gegevens voor dit model zijn:

Interval $[a, b] = [0{,}50]$

Eerste moment $m_1 = 30$ en tweede moment $m_2 = 925$

Het verwachte aantal tekort in backorders $m_5 = 10$

Aantal evaluatiepunten $k' = 10$

Bestelhoeveelheid $q = 40$

Het lineair programma voor de optimale veiligheidsvoorraad te berekenen is gelijk aan:

```
model:
min=s;
!beperking dat we met een kansverdeling bezig zijn;
P1+P2+P3+P4+P5+P6+P7+P8+P9+P10+P11=1;
!beperkingen voor de gekende karakteristieken van de verdeling;
```

```
0*P1+5*P2+10*P3+15*P4+20*P5+25*P6+30*P7+35*P8+40*P9+45*P10+50*
P11=30;
0*P1+25*P2+100*P3+225*P4+400*P5+625*P6+900*P7+1225*P8+1600*P9+
2025*P10+2500*P11=925;
!beperking om te zorgen dat maar 1 evaluatiepunt gekozen wordt;
Y1+Y2+Y3+Y4+Y5+Y6+Y7+Y8+Y9+Y10+Y11=1;
!beperkingen voor de link tussen Y en s;
s>0;
s-5*Y2>0;
s-10*Y3>0;
s-15*Y4>0;
s-20*Y5>0;
s-25*Y6>0;
s-30*Y7>0;
s-35*Y8>0;
s-40*Y9>0;
s-45*Y10>0;
s-50*Y11>0;
!Beperkingen voor de keuze van het evaluatiepunt te bepalen;
5*P2+10*P3+15*P4+20*P5+25*P6+30*P7+35*P8+40*P9+45*P10+50*P11+2
0*Y1<=30;
5*P3+10*P4+15*P5+20*P6+25*P7+30*P8+35*P9+40*P10+45*P11+20*Y2<=
30;
5*P4+10*P5+15*P6+20*P7+25*P8+30*P9+35*P10+40*P11+20*Y3<=30;
5*P5+10*P6+15*P7+20*P8+25*P9+30*P10+35*P11+20*Y4<=30;
5*P6+10*P7+15*P8+20*P9+25*P10+30*P11+20*Y5<=30;
5*P7+10*P8+15*P9+20*P10+25*P11+20*Y6<=30;
5*P8+10*P9+15*P10+20*P11+20*Y7<=30;
5*P9+10*P10+15*P11+20*Y8<=30;
5*P10+10*P11+20*Y9<=30;
5*P11+20*Y10<=30;
20*Y11<=30;
@bin(Y1);@bin(Y2);@bin(Y3);@bin(Y4);@bin(Y5);@bin(Y6);@bin(Y7);@bin(Y8);
@bin(Y9);
@bin(Y10);@bin(Y11);
End
```

waarbij

P_i = De kans op evaluatiepunt i $(i = 1 \dots 11)$

$Y_i = \begin{Bmatrix} 1\ als\ Y_i\ als\ evaluatiepunt\ gekozen\ wordt\ anders, \\ 0 \end{Bmatrix}, (i = 1 \dots 11)$

s = Het bestelpunt

Bijlage 9: Voorbeeld van een lineair programma service-maatstaf vier

In deze bijlage staat een voorbeeld van een uitgeschreven model in Lingo voor de bepaling van de maximale kans op een gebeurtenis dat de vraag met een grootte gelegen in een bepaald interval voorvalt in een bestelperiode.

De gegevens voor dit model zijn:

Interval $[a, b] = [0{,}50]$
Eerste moment $m_1 = 30$ en tweede moment $m_2 = 925$
Het verwachte aantal tekort in backorders $m_6 = 10$
Aantal evaluatiepunten $k' = 10$
De ondergrens $t_1 = 10$ en de bovengrens $t_2 = 20$

Het lineair programma voor de maximale kans op de gebeurtenis dat de vraag in een bepaald interval voorvalt te berekenen is gelijk aan:

```
model:
max=P3+P4+P5;
!beperking dat we met een kansverdeling bezig zijn;
P1+P2+P3+P4+P5+P6+P7+P8+P9+P10+P11=1;
!beperkingen voor de karakteristieken van de verdeling die gekend zijn;
0*P1+5*P2+10*P3+15*P4+20*P5+25*P6+30*P7+35*P8+40*P9+45*P10+50*
P11=30;
0*P1+25*P2+100*P3+225*P4+400*P5+625*P6+900*P7+1225*P8+1600*P9+
2025*P10+2500*P11=925;
End
```

Waarbij

P_i = De kans op evaluatiepunt i $(i = 1 \dots 11)$

Bijlage 10: Resultaten voor onderzoek service-maatstaf drie

Tabel 5.7: Overzicht minimale totale kost en bestelpunt per bestelhoeveelheid

Bestelhoeveelheid q	**Minimale totale kost (€)**	**Bestelpunt s**	**q**	**Min. totale kost (€)**	**s**	**q**	**Min. totale kost(€)**	**s**
1	/	1	101	793,24	36	201	872,09	31
2	19744,20	1	102	792,08	36	202	873,94	31
3	13113,67	2	103	791,00	36	203	875,80	31
4	9825,00	3	104	790,00	35	204	877,67	31
5	7834,60	4	105	789,02	35	205	879,55	31
6	6519,33	5	106	788,11	35	206	881,44	31
7	5589,86	6	107	787,28	35	207	883,34	31
8	4882,00	7	108	786,52	35	208	885,25	30
9	4339,22	8	109	785,83	35	209	887,14	30
10	3906,80	9	110	785,20	35	210	889,05	30
11	3559,36	10	111	784,64	35	211	890,96	30
12	3262,67	11	112	784,14	35	212	892,89	30
13	3017,00	12	113	783,69	34	213	894,82	30
14	2811,43	13	114	783,26	34	214	896,77	30
15	2624,07	14	115	782,90	34	215	898,72	30
16	2464,50	15	116	782,59	34	216	900,69	30
17	2321,71	16	117	782,33	34	217	902,66	30
18	2195,78	17	118	782,14	34	218	904,64	30
19	2081,32	18	119	781,99	34	219	906,63	30
20	1976,60	19	120	781,90	34	220	908,64	30
21	1887,67	20	121	781,86	34	221	910,65	30
22	1798,18	21	122	781,87	34	222	912,67	30
23	1721,78	22	123	781,93	34	223	914,70	30
24	1650,33	23	124	782,03	34	224	916,73	30
25	1583,24	24	125	782,18	34	225	918,78	30
26	1522,00	25	126	782,38	34	226	920,81	29
27	1465,96	26	127	782,62	34	227	922,85	29
28	1416,43	27	128	782,91	34	228	924,89	29
29	1372,72	28	129	783,23	34	229	926,95	29
30	1329,07	29	130	783,60	33	230	929,01	29
31	1295,52	30	131	783,96	33	231	931,08	29
32	1261,38	31	132	784,36	33	232	933,16	29
33	1231,42	32	133	784,80	33	233	935,24	29

34	1205,29	33	134	785,28	33	234	937,33	29
35	1181,17	34	135	785,80	33	235	939,43	29
36	1160,33	35	136	786,35	33	236	941,54	29
37	1139,70	36	137	786,94	33	237	943,66	29
38	1124,74	37	138	787,57	33	238	945,78	29
39	1109,67	38	139	788,22	33	239	947,91	29
40	1094,50	39	140	788,91	33	240	950,05	29
41	1083,05	40	141	789,64	33	241	952,20	29
42	1071,33	41	142	790,39	33	242	954,35	29
43	1060,58	42	143	791,18	33	243	956,51	29
44	1049,55	43	144	792,00	33	244	958,67	29
45	1041,71	44	145	792,85	33	245	960,84	29
46	1033,48	45	146	793,73	33	246	963,02	29
47	1024,87	46	147	794,63	33	247	965,21	29
48	1019,17	47	148	795,54	32	248	967,40	29
49	1013,00	48	149	796,46	32	249	969,60	29
50	1006,40	49	150	797,41	32	250	971,81	29
51	991,24	50	151	798,39	32	251	974,02	29
52	981,00	50	152	799,39	32	252	976,24	29
53	971,26	50	153	800,42	32	253	978,46	29
54	962,00	50	154	801,48	32	254	980,69	29
55	953,18	50	155	802,56	32	255	982,93	29
56	944,79	50	156	803,67	32	256	985,17	29
57	936,79	50	157	804,80	32	257	987,42	29
58	929,17	50	158	805,95	32	258	989,67	29
59	921,92	50	159	807,13	32	259	991,93	29
60	915,00	50	160	808,33	32	260	994,20	29
61	908,41	50	161	809,55	32	261	996,47	29
62	902,13	50	162	810,79	32	262	998,75	29
63	896,14	50	163	812,06	32	263	1001,03	29
64	890,44	50	164	813,34	32	264	1003,32	29
65	885,00	50	165	814,65	32	265	1005,61	29
66	879,82	50	166	815,98	32	266	1007,91	29
67	874,88	50	167	817,32	32	267	1010,21	29
68	870,18	50	168	818,69	32	268	1012,52	29
69	865,70	50	169	820,08	32	269	1014,84	29
70	861,43	50	170	821,48	32	270	1017,16	29
71	857,37	50	171	822,91	32	271	1019,48	29
72	853,50	50	172	824,35	32	272	1021,81	29
73	849,82	50	173	825,81	32	273	1024,14	29
74	846,32	50	174	827,26	31	274	1026,48	29

75	843,00	50	175	828,73	31	275	1028,83	29
76	839,84	50	176	830,20	31	276	1031,17	29
77	836,84	50	177	831,70	31	277	1033,53	29
78	834,00	50	178	833,21	31	278	1035,87	28
79	831,30	50	179	834,74	31	279	1038,21	28
80	828,75	50	180	836,29	31	280	1040,56	28
81	826,33	50	181	837,85	31	281	1042,91	28
82	824,05	50	182	839,43	31	282	1045,26	28
83	821,89	50	183	841,02	31	283	1047,62	28
84	819,86	50	184	842,63	31	284	1049,99	28
85	817,94	50	185	844,25	31	285	1052,35	28
86	816,14	50	186	845,89	31	286	1054,73	28
87	814,43	49	187	847,55	31	287	1057,10	28
88	812,77	49	188	849,21	31	288	1059,49	28
89	811,22	49	189	850,89	31	289	1061,87	28
90	809,78	49	190	852,59	31	290	1064,26	28
91	808,43	49	191	854,30	31	291	1066,66	28
92	807,17	49	192	856,02	31	292	1069,05	28
93	805,73	36	193	857,76	31	293	1071,46	28
94	803,83	36	194	859,51	31	294	1073,86	28
95	802,03	36	195	861,27	31	295	1076,27	28
96	800,33	36	196	863,04	31	296	1078,69	28
97	798,73	36	197	864,83	31	297	1081,11	28
98	797,22	36	198	866,63	31	298	1083,53	28
99	795,81	36	199	868,44	31	299	1085,96	28
100	794,48	36	200	870,26	31	300	1088,39	28

Bijlage 11: Verwacht aantal producten in backorder in een bestelperiode voor onderzoek service-maatstaf drie.

Tabel 5.8: Verwacht aantal tekort in backorder in een bestelperiode voor de selectie van waardes van het bestelpunt

Bestelpunt s	Verwacht aantal producten in backorder	Bestelpunt s	Verwacht aantal producten in backorder
1	24,107	26	3,85
2	23,21	27	3,44
3	22,32	28	3,08
4	21,42	29	2,76
5	20,53	30	2,5
6	19,64	31	2,26
7	18,74	32	2,06
8	17,85	33	1,89
9	16,96	34	1,74
10	16,07	35	1,61
11	15,17	36	1,49
12	14,28	37	1,39
13	13,39	38	1,28
14	12,49	39	1,17
15	11,61	40	1,07
16	10,74	41	0,96
17	9,89	42	0,85
18	9,06	43	0,74
19	8,26	44	0,64
20	7,5	45	0,53
21	6,76	46	0,42
22	6,08	47	0,32
23	5,44	48	0,21
24	4,85	49	0,1
25	4,32	50	0

Auteursrechtelijke overeenkomst

Ik/wij verlenen het wereldwijde auteursrecht voor de ingediende eindverhandeling:
Voorraadbeslissingen in een omgeving van onvolledige kennis van de vraag gedurende de levertijd

Richting: **master in de toegepaste economische wetenschappen: handelsingenieur-operationeel management en logistiek**
Jaar: **2015**

in alle mogelijke mediaformaten, - bestaande en in de toekomst te ontwikkelen - , aan de Universiteit Hasselt.

Niet tegenstaand deze toekenning van het auteursrecht aan de Universiteit Hasselt behoud ik als auteur het recht om de eindverhandeling, - in zijn geheel of gedeeltelijk -, vrij te reproduceren, (her)publiceren of distribueren zonder de toelating te moeten verkrijgen van de Universiteit Hasselt.

Ik bevestig dat de eindverhandeling mijn origineel werk is, en dat ik het recht heb om de rechten te verlenen die in deze overeenkomst worden beschreven. Ik verklaar tevens dat de eindverhandeling, naar mijn weten, het auteursrecht van anderen niet overtreedt.

Ik verklaar tevens dat ik voor het materiaal in de eindverhandeling dat beschermd wordt door het auteursrecht, de nodige toelatingen heb verkregen zodat ik deze ook aan de Universiteit Hasselt kan overdragen en dat dit duidelijk in de tekst en inhoud van de eindverhandeling werd genotificeerd.

Universiteit Hasselt zal mij als auteur(s) van de eindverhandeling identificeren en zal geen wijzigingen aanbrengen aan de eindverhandeling, uitgezonderd deze toegelaten door deze overeenkomst.

Voor akkoord,

Pallen, Arne

Datum: **10/06/2015**