

# *Rittenplanning met gecombineerde ophaling en levering*

**Karen VAN GOMPEL**

promotor :  
Prof. dr. Gerrit JANSSENS



## **Voorwoord**

In het kader van het laatste jaar van mijn studie tot handelsingenieur, is het schrijven van een eindverhandeling een van de belangrijkste opleidingsonderdelen. Het schrijven van deze eindverhandeling heeft me dan ook vele uren hard werk bezorgd. Het was echter ook een zeer leerrijke ervaring.

Deze eindverhandeling is tot stand gekomen door mijn persoonlijke inzet, maar tevens met de hulp en de steun van een aantal andere mensen. Ten eerste zou ik mijn promotor, prof. dr. G.K. Janssens, en mevrouw A. Caris willen bedanken voor de nodige begeleiding vanuit de Universiteit Hasselt. Ten tweede richt ik een woord van dank aan mijn kotgenoten en medestudenten die mij steeds gesteund hebben tijdens het schrijven van deze eindverhandeling. Tenslotte wil ik ook mijn ouders en mijn vriend bedanken voor hun steun en hun vertrouwen in mij.

## Samenvatting

Dit eindwerk behandelt het onderwerp "Rittenplanning met gecombineerde ophaling en levering". De essentie van een rittenplanningsprobleem met ophaling en levering, bestaat uit het opbouwen van een verzameling van routes zodat transportverzoeken, bestaande uit een ophaling en/of een levering, naar tevredenheid van de klanten worden afgehandeld.

Het werk start met een korte inleiding op de materie door middel van een motivering van de keuze voor dit onderwerp. Hierbij komt de omkadering van het onderwerp aan bod. In het tweede deel van dit eerste inleidende hoofdstuk wordt de onderzoeksopzet kort uitgelegd.

In hoofdstuk twee wordt gestart met een theoretisch onderzoek. In dit hoofdstuk komt een literatuurstudie van rittenplanningsproblemen aan bod. Vier klassieke rittenplanningsproblemen worden behandeld. De aandacht gaat hierbij vooral uit naar het rondritplanningsprobleem of '*vehicle routing problem*'. Het einde van dit tweede hoofdstuk behandelt de algemene karakteristieken van rittenplanningsproblemen, zonder onderscheid tussen de eerder besproken types rittenplanningsproblemen.

Een derde hoofdstuk gaat dieper in op rittenplanningsproblemen met ophaling en levering. In het eerste deel van dit hoofdstuk wordt gekeken naar verschillende manieren om een onderscheid te maken tussen diverse soorten rondritplanningsproblemen. Vervolgens wordt overgegaan tot de bespreking van een algemeen optimalisatiemodel voor het rondritplanningsprobleem met ophaling en levering. Een derde en laatste gedeelte van dit hoofdstuk betreft de toevoeging van tijdsvensters aan rittenplanningsproblemen met ophaling en levering.

Hoofdstuk vier en vijf vormen het praktische gedeelte van deze eindverhandeling. In hoofdstuk vier wordt het rondritplanningsprobleem met eenheidsladingen of VRPFC

besproken. In een eerste deel wordt een beschrijving gegeven van dit VRPFC, met tot slot de wiskundige formulering van het model. Vervolgens wordt het concept Lagrange relaxatie algemeen uitgelegd, waarna de toepassing van deze techniek in het VRPFC bekeken wordt. Een derde deel beschrijft een heuristische oplossingsprocedure, waarna twee kleine voorbeelden uitgewerkt worden om deze procedure verder te verduidelijken.

Hoofdstuk vijf behandelt een rondritplanningsprobleem met eenheidsladingen en tijdsvensters. Dit hoofdstuk bekijkt de toevoeging van tijdsvensters aan het VRPFC uit hoofdstuk vier. Het eerste deel wordt opnieuw gevormd door een beschrijving van het probleem. Vervolgens wordt een mogelijke heuristische oplossingsprocedure voorgesteld, waarna deze procedure geïllustreerd wordt door middel van de toepassing ervan op een klein voorbeeld met dezelfde basisgegevens als het eerste voorbeeld uit hoofdstuk vier. Ter afsluiting van dit hoofdstuk en de volledige eindverhandeling worden tenslotte een aantal aanbevelingen voor verder onderzoek gegeven.

## Inhoudsopgave

Voorwoord .....	- 1 -
Samenvatting .....	- 2 -
Inhoudsopgave .....	- 4 -
Hoofdstuk 1: Inleiding .....	- 8 -
1.1 Motivering onderwerp .....	- 8 -
1.2 Onderzoeksopzet .....	- 10 -
Hoofdstuk 2: Overzicht van de verschillende types van rittenplanningsproblemen .....	- 12 -
2.1 Inleiding .....	- 12 -
2.2 Rittenplanningsproblemen .....	- 12 -
2.2.1 Algemeen .....	- 12 -
2.2.2 Het handelsreizigersprobleem of <i>'Travelling Salesman Problem'</i> .....	- 13 -
2.2.3 Het rondritplanningsprobleem of <i>'Vehicle Routing Problem'</i> .....	- 15 -
2.2.3.1 Inleiding .....	- 15 -
2.2.3.2 Classificatie: adressen .....	- 16 -
2.2.3.3 Classificatie: voertuigen .....	- 18 -
2.2.3.4 Classificatie: probleemkarakteristieken .....	- 19 -
2.2.3.5 Classificatie: doelfuncties .....	- 21 -
2.2.3.6 Frequent bestudeerde modellen van het rondritplanningsprobleem .....	- 22 -
2.2.4 Het <i>'Chinese Postman Problem'</i> .....	- 23 -
2.2.5 Het <i>'Rural Postman Problem'</i> .....	- 24 -
2.3 Karakteristieken van rittenplanningsproblemen .....	- 24 -
2.3.1 Transportverzoeken .....	- 25 -
2.3.2 Tijdsbeperkingen .....	- 26 -
2.3.3 Doelfuncties .....	- 27 -
2.3.4 Oplossingsmethoden .....	- 28 -
Hoofdstuk 3: Rittenplanning met ophaling en levering .....	- 32 -
3.1 Inleiding .....	- 32 -

3.2 Drie modellen voor het rondritplanningsprobleem met ophaling en levering....	- 33 -
3.2.1 Levering eerst, ophaling daarna of ‘ <i>delivery-first, pickup-second</i> ’ .....	- 33 -
3.2.2 Gemengde ophalingen en leveringen of ‘ <i>mixed pickups and deliveries</i> ’ .....	- 33 -
3.2.3 Gelijktijdige ophalingen en leveringen of ‘ <i>simultaneous pickups and deliveries</i> ’ .....	- 34 -
3.3 Andere opdelingen van rondritplanningsproblemen met ophaling en levering..	- 35 -
3.4 Wiskundige formulering van een algemeen model voor rittenplanningsproblemen met gecombineerde ophaling en levering .....	- 35 -
3.5 Ophaling en levering met tijdsvensters .....	- 38 -
3.5.1 Inleiding .....	- 38 -
3.5.2 Het rondritplanningsprobleem met tijdsvensters.....	- 39 -
3.5.3 Het ‘ <i>pickup and delivery problem</i> ’ met tijdsvensters .....	- 40 -
3.5.3.1 Een ‘ <i>reactive tabu search</i> ’ algoritme voor het PDPTW (Nanry en Barnes, 2000) .....	- 41 -
3.5.3.2 Vier, op het spaaralgoritme gebaseerde, heuristieken (Gronalt et al., 2003).....	- 44 -
3.5.3.3 Een invoegheuristiek voor het PDPTW (Lu en Dessouky, 2006).....	- 50 -
3.6 Het uitwerken van een voorbeeldprobleem .....	- 54 -
Hoofdstuk 4: Rondritplanning met ophaling en levering en eenheidsladingen-	
55 -	
4.1 Inleiding .....	- 55 -
4.2 Definitie van het probleem .....	- 55 -
4.2.1 De vloot .....	- 55 -
4.2.2 Probleemformulering.....	- 57 -
4.2.3 Wiskundige formulering van het optimalisatieprobleem .....	- 58 -
4.2.4 Toepassing van de techniek van Lagrange relaxatie.....	- 59 -
4.2.4.1 Inleiding.....	- 59 -
4.2.4.2 Lagrange relaxatie voor geheeltallige lineaire programmeringsproblemen .....	- 60 -
4.2.4.3 Lagrange relaxatie voor rondritplanning met eenheidsladingen .....	- 62 -
4.3 De oplossingsprocedure: een Lagrange relaxatie-gebaseerde heuristiek .....	- 63 -
4.3.1 Koppeling van leverings- en ophalingspunten .....	- 63 -
4.3.2 Toewijzing van de gekoppelde leverings- en ophalingspunten aan de vloot.....	- 64 -
4.3.3 Overzicht van de volledige heuristische oplossingsprocedure .....	- 65 -
4.3.4 Bepaling van de Lagrange multiplicatoren: de ‘ <i>subgradient optimization procedure</i> ’- .....	- 65 -
4.4 Illustratie aan de hand van een voorbeeld met uitsluitend eigen vrachtwagens-	67 -

4.4.1 Inleiding .....	67 -
4.4.2 De data .....	68 -
4.4.3 Bepaling van geschikte Lagrange multiplicatoren voor het probleem .....	70 -
4.4.4 Oplossing van het probleem via de heuristiek .....	72 -
4.4.5 De exacte oplossing van het probleem .....	72 -
4.5 Illustratie aan de hand van een voorbeeld met eigen en externe vrachtwagens -	74 -
4.5.1 Inleiding .....	74 -
4.5.2 De data .....	74 -
4.5.3 Bepaling van geschikte Lagrange multiplicatoren voor het probleem .....	76 -
4.5.4 De exacte oplossing van het probleem .....	81 -
4.6 Introductie van tijdsvensters .....	83 -
Hoofdstuk 5: Rondritplanning met ophaling en levering, eenheidsladingen en tijdsvensters .....	84 -
5.1 Inleiding .....	84 -
5.2 Wiskundige formulering van het VRPFCTW .....	84 -
5.3 De oplossingsprocedure: een invoegheuristiek in twee fasen .....	87 -
5.3.1 Inleiding .....	87 -
5.3.2 Fase 1: koppeling van leverings- en ophalingspunten .....	88 -
5.3.3 Fase 2: toewijzing van de gekoppelde leverings- en ophalingspunten aan de vloot -	90 -
5.4 Illustratie aan de hand van een voorbeeld met uitsluitend eigen vrachtwagens -	92 -
5.4.1 Inleiding .....	92 -
5.4.2 De data .....	92 -
5.4.3 De oplossing van het probleem via de heuristiek .....	94 -
5.4.3.1 Fase 1: koppeling van leverings- en ophalingspunten .....	94 -
5.4.3.2 Fase 2: toewijzing van de gekoppelde leverings- en ophalingspunten aan de vloot .....	99 -
5.4.3.3 Vergelijking van de drie scenario's .....	106 -
5.4.4 De exacte oplossing van het probleem .....	106 -
5.5 Aanbevelingen voor verder onderzoek .....	108 -
Lijst der geraadpleegde werken .....	110 -
Bijlagen .....	117 -
Bijlage 1: Lijst der gebruikte figuren .....	117 -



Bijlage 2: Lijst der gebruikte tabellen .....	- 117 -
Bijlage 3: Classificatie van rondritplanningsproblemen of ' <i>vehicle routing problems</i> ' van Desrochers et al. (1990).....	- 119 -
Bijlage 4: Wiskundige formulering van het cijfervoorbeeld van het VRPFCTW.....	- 122 -

## **Hoofdstuk 1: Inleiding**

### ***1.1 Motivering onderwerp***

In het kader van het schrijven van mijn eindverhandeling, tot het behalen van de graad handelsingenieur, koos ik voor het onderwerp "Rittenplanning met gecombineerde ophaling en levering". De keuze voor dit onderwerp komt voort uit mijn persoonlijke interesse voor toegepaste wiskunde, meer specifiek operationeel onderzoek in dit geval, en de, vanuit mijn studies gegroeide, interesse voor logistiek. Bij rittenplanning wordt een set van routes, één per benodigde vrachtwagen, geconstrueerd zodat transportverzoeken naar tevredenheid van de klanten worden afgehandeld. Het is economisch gezien belangrijk dat deze set van routes zo min mogelijk kosten meebrengt voor het bedrijf.

Transport is een belangrijk domein van menselijke activiteit, aangezien het veel sociale en economische activiteiten mogelijk maakt. Het belang van het transporteren van boodschappen, goederen of mensen komt in alle aspecten van het dagelijkse leven naar voor. Wanneer persoon X 's morgens naar zijn werk vertrekt, moet hij zich daarvoor verplaatsen. Op het werk maakt deze persoon vermoedelijk gebruik van allerlei materiaal dat door andere firma's geproduceerd werd en dat bijgevolg naar de werkplek van X moest vervoerd worden. Als persoon X op bezoek wil gaan bij familie, dan heeft hij vervoer nodig. Indien persoon X zijn familie een brief wil sturen, moet die brief getransporteerd worden. Zo zijn nog vele voorbeelden van de noodzaak van transport op te noemen.

Voorals vrachtvervoer vormt één van de belangrijkste activiteiten van de huidige maatschappij. De omzet van goederenvervoer in Europa wordt geschat op ongeveer 168 miljard dollar per jaar. Omgerekend aan de huidige wisselkoers vormt dit een bedrag van bijna 130 miljard euro per jaar. In Groot-Brittannië, Frankrijk en Denemarken vertegenwoordigt transport respectievelijk ongeveer 15%, 9% en 15% van de nationale

uitgaven (Crainic en Laporte, 1997 – geciteerd door Bräysy en Gendreau, 2005a; Larsen, 1999 – geciteerd door Bräysy en Gendreau, 2005a). Naar schatting vertegenwoordigen de distributiekosten bijna de helft van de totale logistieke kosten en in sommige industrieën, zoals de voedings- en drankindustrie, kunnen de distributiekosten tot 70% van de toegevoegde waarde van goederen vertegenwoordigen (De Backer et al., 1997 – geciteerd door Bräysy en Gendreau, 2005a; Golden en Wasil, 1987).

Moderne logistiek wordt door Christopher (1986 – geciteerd door Laporte and Osman, 1995, p. 227) als volgt omschreven: *“the process of strategically managing the movement or storage of materials, parts and finished inventory from suppliers, through the firm and on to the consumers”*. Tegenwoordig leggen veel bedrijven in hun strategie nadruk op efficiënte verplaatsing van goederen of werknemers om zo de marktvraag te kunnen voldoen en te vergroten. Oorspronkelijk beschouwden ondernemingen de logistieke functie echter als ondergeschikt en niet als bron van competitief voordeel, waardoor ze nauwelijks tot geen aandacht besteedden aan deze functie. Deze visie is echter door recente ontwikkelingen drastisch veranderd. Logistiek heeft zich steeds meer ontwikkeld tot een kritische succesfactor, onder andere door het grote aandeel van logistieke kosten. Zo stellen van Goor, Ploos van Amsel en Ploos van Amstel in hun boek ‘Fysieke distributie: denken in toegevoegde waarde’ (1999, p. 9): *“Wie de logistiek niet goed organiseert, verdwijnt van de markt.”*.

De aandacht voor het milieu vormt een andere reden voor het belang van een efficiënte organisatie van de distributiefunctie. De laatste jaren is het milieubewustzijn van de Westerse mens sterk gegroeid, waardoor meer gedaan wordt om het milieu te beschermen door zowel individuen, private bedrijven als de overheid (wetgeving). Twee van de voornaamste doelen bestaan in het verminderen van zowel de productie van afval als het verbruik van energie. Energieverbruik is rechtstreeks gerelateerd aan kosten, dus zullen mensen automatisch hun best doen om zo min mogelijk energie te verspillen. Afvalproductie is echter niet rechtstreeks gerelateerd aan kosten, maar omwille van een gevoel van verantwoordelijkheid voor het behoud van de aarde en omwille van wetgeving

in dit verband wordt meer en meer aandacht aan het verminderen van de afvalberg geschonken. Om dit laatste te bereiken wordt nu aandacht besteed aan recyclage en hergebruik van goederen aan het einde van hun levenscyclus en van verpakkingsmaterialen. Wetgeving op dit gebied resulteerde in een nieuwe stroom van goederen in de logistieke keten, namelijk die van klant naar leverancier. De rittenplanning moet dus aangepast worden zodat ook goederen opgehaald kunnen worden in plaats van enkel leveringen in rekening te brengen. Deze implementatie van retourlogistiek moet echter voorzichtig aangepakt worden om onnodige schade aan het milieu door het extra transport te vermijden. Hieruit blijkt dus nogmaals het belang van een efficiënte rittenplanning. (Dethloff, 2001; Fleischmann, 1997)

## **1.2 Onderzoeksopzet**

In een eerste deel van deze eindverhandeling wordt aan de hand van een literatuurstudie een verkennend onderzoek uitgevoerd naar de verschillende types van rittenplanningproblemen. Vanuit dit theoretisch onderzoek wordt vervolgens ervoor gekozen om een rondritplanningsprobleem met ophaling en levering en eenheidsladingen verder te bekijken.

Naar aanleiding van een voorstel van prof. dr. Janssens werd gekozen om voor het tweede deel van deze eindverhandeling het artikel van Imai et al. (2007) nader te bestuderen om vanuit de beschrijving van het rondritplanningsprobleem met ophaling en levering en eenheidsladingen over te gaan tot de bespreking van eenzelfde type probleem, uitgebreid met de aanwezigheid van tijdsvensters. Eerst wordt onderzocht of de door Imai et al. (2007) toegepaste heuristiek op een eenvoudige manier aangepast kan worden aan dit nieuwe probleem. Aangezien Imai et al. (2007) echter gebruik maken van Lagrange relaxatie, is dit niet voor de hand liggend en wordt deze optie niet gekozen. De tweede optie bestaat uit het opstellen van een nieuwe heuristische oplossingsprocedure voor het rondritplanningsprobleem met ophaling en levering, eenheidsladingen en tijdsvensters.

Om beide modellen uit dit tweede deel toe te lichten werd ook gebruik gemaakt van kleine cijfervoorbeelden, die alle gebaseerd werden op dezelfde basisgegevens. Er werd gekozen om niet te werken met veel en/of grote experimenten zodat het trekken van algemene conclusies in deze eindverhandeling geen mogelijkheid vormt. De voorbeelden dienen enkel ter ondersteuning van de beschreven en ontwikkelde procedures en tonen hoe de gebruikte technieken toegepast worden.

## **Hoofdstuk 2: Overzicht van de verschillende types van rittenplanningsproblemen**

### ***2.1 Inleiding***

De essentie van een rittenplanningsprobleem, eventueel met ophaling en levering, bestaat uit het opbouwen van een verzameling van routes zodat transportverzoeken naar tevredenheid van de klanten worden afgehandeld. Om aan de transportverzoeken te voldoen beschikt het bedrijf over een vloot voertuigen. Elk voertuig beschikt over een gegeven capaciteit, een startlocatie en een eindlocatie. De transportverzoeken op hun beurt bepalen de te vervoeren lading, de ophaallocaties of de oorsprongen en de afleverlocaties of de bestemmingen. Elke lading dient vanaf haar oorsprong(en) tot haar bestemming(en) vervoerd te worden door één enkel voertuig zonder overslag (het van één transportmodus overladen van de goederen op een andere modus). (Savelsbergh en Sol, 1995)

### ***2.2 Rittenplanningsproblemen***

#### **2.2.1 Algemeen**

Laporte en Osman (1995) bespreken vier klassieke rittenplanningsproblemen. Het eerste type probleem is het *'travelling salesman problem'*, afgekort als TSP. Een tweede type probleem dat klassiek wordt genoemd, is het *'vehicle routing problem'* of, afgekort als VRP. Het derde type dat aangehaald wordt, kan teruggevonden worden onder de benoeming *'Chinese postman problem'*, afgekort als CPP. Als laatste type wordt het *'rural postman problem'*, afgekort als RPP, vermeld. In de rest van deze paragraaf worden deze probleemtipes verder uitgediept.

## 2.2.2 Het handelsreizigersprobleem of '*Travelling Salesman Problem*'

Volgens Dantzig et al. (1954), aangehaald in Laporte en Nobert (1983), kan het handelsreizigersprobleem beschreven worden als het vinden van de kortste route door  $n$  steden waarbij een handelsreiziger elk van deze steden slechts één keer bezoekt op zijn verkoopsmissie. Walshaw (2002) voegt hieraan toe dat de verkoper na zijn tour terugkeert naar zijn startlocatie.

Het '*travelling salesman problem*' of, afgekort, TSP bevat twee elementen waarvan geweten is dat ze reeds lange tijd wiskundigen aantrekken tot specifieke problemen, namelijk het feit dat het probleem eenvoudig te verwoorden is en het feit dat het moeilijk op te lossen is. Voor het handelsreizigersprobleem is nog steeds geen "*goed*" optimalisatiealgoritme gevonden en ook geen benaderingsalgoritme dat gegarandeerd effectief is. Het '*travelling salesman problem*' is echter ook van praktisch belang aangezien vele relevante reële problemen geformuleerd kunnen worden als instanties van het TSP. Het belang van het TSP ligt tevens in het feit dat het een typisch voorbeeld is van een probleem uit de klasse van de combinatorische optimalisatieproblemen. (Lawler et al., 1987)

Optimalisatieproblemen worden heel algemeen opgedeeld in twee klassen: problemen met continue variabelen en problemen met discrete variabelen of combinatorische problemen. Bij het oplossen van de eerste soort problemen wordt gezocht naar een verzameling reële getallen of zelfs een functie, terwijl bij de tweede soort problemen gezocht wordt naar een bepaalde instantie uit een eindige set van toelaatbare oplossingen. Bij combinatorische optimalisatie wordt dus gezocht naar de best mogelijke oplossing uit een eindige oplossingsruimte.

Bij het handelsreizigersprobleem wordt getracht de totale afstand die de verkoper moet afleggen te minimaliseren. Hieruit blijkt dat het om een optimalisatieprobleem gaat, aangezien optimalisatie zich bezig houdt met het vinden van de beste (of optimale) oplossing voor een gegeven probleem. Het aantal toelaatbare oplossingen is echter niet

oneindig, maar beperkt tot de set van alle mogelijke routes waarbij de  $n$  steden slechts één keer worden bezocht, wat wijst op een combinatorische situatie. Het TSP is bijgevolg een combinatorisch optimalisatieprobleem. (Foulds, 1984; Lawler et al., 1987; Papadimitriou en Steiglitz, 1982)

Het *'travelling salesman problem'* is een NP-hard probleem, waarbij NP staat voor *'non-deterministic polynomial time'*. Het begrip NP-hard komt uit het domein van *'computational complexity theory'*, een theorie die zich bezighoudt met de complexiteit (hoeveel middelen (bvb. tijd, opslagruimte) vereist zijn) van berekeningen en daarbij vooral kijkt naar beslissingsproblemen (ja/nee antwoord nodig). Om tot een verklaring van het begrip NP-hard te kunnen komen, moeten eerst de begrippen reduceerbaarheid en NP-compleet uitgelegd worden. Een probleem  $P$  is reduceerbaar tot probleem  $P'$  ( $P \propto P'$ ) als  $P$  beschouwd kan worden als een speciaal geval van  $P'$  of formeler als voor alle instanties van  $P$  een overeenkomende instantie van  $P'$  geconstrueerd kan worden in polynomiale tijd (van de vorm  $x^n$ , met  $n$  = probleemgrootte) zodat bij het oplossen van deze laatste instantie de eerste ook opgelost wordt. Een probleem  $P'$  wordt NP-compleet genoemd als het het moeilijkste probleem in NP is, d.i. als  $P' \in \text{NP}$  en  $P \propto P'$  voor alle  $P \in \text{NP}$ . Het is onwaarschijnlijk dat NP-complete problemen goed oplosbaar zijn, i.e. oplosbaar binnen een rekentijd die gebonden is door een polynomiale functie van de probleemgrootte. Om van hier de overgang te maken naar het begrip NP-hard, moet de overgang gemaakt worden van beslissingsproblemen naar optimalisatieproblemen. Het probleem om een aanvaardbare oplossing te vinden van een minimale waarde (optimalisatie) wordt hierbij meestal geherformuleerd als zijnde het probleem om het bestaan te verifiëren van een aanvaardbare oplossing met een waarde die op zijn minst gelijk is aan een gegeven drempelwaarde (beslissingsprobleem). Als dit laatste beslissingsprobleem NP-compleet is, dan wordt van het bijhorende optimalisatieprobleem gezegd dat het NP-hard is in de zin dat het minstens even moeilijk is als elk probleem in NP. (Lenstra et al., 1982; Rothe, 2005)



## 2.2.3 Het rondritplanningsprobleem of '*Vehicle Routing Problem*'

### 2.2.3.1 Inleiding

Het klassieke rondritplanningsprobleem of '*vehicle routing problem*', afgekort VRP, bestaat erin dat een bepaald product of bepaalde producten gedistribueerd moeten worden vanuit een centraal depot met behulp van een gegeven vloot van voertuigen die een beperkte laadcapaciteit hebben. Hierbij wordt aangenomen dat deze vloot voldoende groot is om aan de verzoeken te voldoen en dat alle voertuigen identiek zijn. De vloot bevindt zich in het centrale depot van waaruit alle voertuigen op hun route vertrekken en waarnaar ze ook terugkeren. Elk transportverzoek van een klant specificeert de grootte van de lading die deze klant wil ontvangen en waar deze lading geleverd moet worden. De opdracht van het klassieke VRP bestaat dus uit het toewijzen van klanten aan een bepaald voertuig en een route te bepalen voor dit voertuig zodat een bepaalde doelfunctie wordt geminimaliseerd of gemaximaliseerd. Deze doelfunctie kan ontworpen zijn om bijvoorbeeld de distributiekosten te minimaliseren, de winst te maximaliseren, enzovoort. (Dethloff, 2001; Zeng et al., 2005)

Het rondritplanningsprobleem werd voor het eerst in de literatuur aangehaald in Dantzig en Ramser (1959). Deze auteurs zoeken een optimale rittenplanning voor een vloot van vrachtwagens die benzine leveren aan een groot aantal tankstations vanuit een centrale terminal. De doelstelling bestaat uit het minimaliseren van de totale afstand die door de vloot wordt afgelegd, terwijl aan de vraag van elk tankstation voldaan wordt. Dit probleem wordt door de auteurs het '*truck dispatching problem*' genoemd. In Lawler et al. (1987) wordt vermeld dat het '*vehicle routing problem*' naast de reeds genoemde benaming '*truck dispatching problem*' ook in de literatuur gekend staat als '*vehicle scheduling problem*' en '*delivery problem*'.

In de literatuur wordt melding gemaakt van verschillende varianten op het klassieke '*vehicle routing problem*'. Het kan hierbij bijvoorbeeld gaan om situaties met meerdere depots, heterogene laadcapaciteiten van de voertuigen in plaats van de algemeen

veronderstelde homogene vloot, tijdsvensters die gerespecteerd moeten worden, precedentierelaties tussen klanten waarbij een klant belangrijker is dan een andere en dus eerder moet bediend worden, situaties met gecombineerde ophaling en levering, enzovoort (Laporte en Osman, 1995). In Desrochers et al. (1990) wordt een classificatie voorgesteld waarin gebruik gemaakt wordt van vier klassen met elk een aantal subklassen. Elk VRP krijgt hierdoor een unieke notatie en kan in een klasse geplaatst worden. Een eerste klasse beschrijft de verschillende kenmerken en beperkingen die enkel relevant zijn voor een bepaald adres (klant of depot). De tweede klasse omvat de karakteristieken die enkel van toepassing zijn op een bepaald voertuig. Alle karakteristieken van het probleem die niet gerelateerd kunnen worden aan een specifiek adres of voertuig worden samengevoegd in de derde klasse. En als laatste worden de mogelijke doelfuncties gebundeld in een vierde klasse. Opgesomd gaat het dus om de volgende vier klassen: adressen, voertuigen, probleemkarakteristieken en doelfuncties. In de volgende paragrafen worden deze klassen wat uitgediept. Hierbij wordt telkens Desrochers et al. (1990) gebruikt als informatiebron, deze bron zal niet meer na elke paragraaf vermeld worden. Wanneer bijkomende literatuur gebruikt wordt, staat deze natuurlijk nog wel aangegeven. In bijlage 3 kan een overzicht van de classificatie van Desrochers et al. (1990) teruggevonden worden.

#### 2.2.3.2 Classificatie: adressen

Een eerste subklasse die onder de hoofdklasse "adressen" valt, betreft het aantal depots. Een rondritplanningsprobleem kan bestaan uit het vinden van een geschikt rittenplan vanuit één enkel centraal depot of het kan nodig zijn een rittenplan op te stellen met voertuigen die vertrekken en terugkeren naar verschillende depots, waarbij het aantal gebruikte depots in de beschrijving van het probleem gespecificeerd wordt.

De tweede subklasse heeft te maken met de vraag. Binnen deze subklasse kunnen drie delen onderscheiden worden: de locatie, het type en de aard van de vraag. De locatie van de vraag vormt een eerste deel van deze subklasse. Hier kunnen vier mogelijkheden onderscheiden worden. De eerste mogelijkheid plaatst de klanten op de 'nodes' of knopen

van het netwerk. Een klant heeft dus een specifieke locatie. Als tweede mogelijkheid wordt het plaatsen van de klanten op de 'edges' of 'arcs' van het netwerk genoemd. Dit betekent dat de klanten gezien worden als straten. Als het om tweerichtingsstraten gaat, wordt gesproken over 'edges' en éénrichtingsstraten worden 'arcs' genoemd. Wanneer de twee voorgaande mogelijkheden gemengd worden, wordt een derde mogelijkheid gecreëerd, namelijk gemengde vestigingen of 'mixed location'. Een laatste mogelijkheid is TASK. Deze term duidt erop dat elke klant een oorsprong-bestemmingspaar aangeeft. De lading die vervoerd moet worden, wordt dan opgepikt op het oorsprongadres en vervolgens getransporteerd naar de bestemming. Het tweede deel van deze subklasse is het type vraag waar het om gaat. Bestaat het probleem enkel uit ophaal- of afleverlocaties en gaat het dus maar om één type vraag of moeten zowel ophalingen als leveringen uitgevoerd worden door de vloot en kent het probleem dus een gemengde vraag. Tenslotte bepaalt de (on)zekerheid van de vraag of het om een deterministisch of stochastisch VRP gaat. (Pearn en Liu, 1995)

De tijdsbeperkingen van toepassing op het VRP vormen de derde subklasse. Een eerste mogelijkheid is hierbij dat tijdsbeperkingen niet van toepassing zijn voor een bepaald probleem. Ook is het mogelijk dat de klant het tijdstip waarop de ophaling of levering moet gebeuren heeft vastgezet. Een derde mogelijkheid is het bestaan van tijdsvensters die het tijdsinterval bepalen waarbinnen een bepaalde locatie bediend moet worden. Dit tijdsvenster bepaalt de tijdstippen waarop de dienstverlening op een bepaalde locatie ten vroegste mag beginnen en waarop ze ten laatste moet eindigen. Hierbij kan de klant één of meerdere tijdsvensters specificeren. (Savelsbergh en Sol, 1995)

De vierde en laatste subklasse omvat de selectiebeperkingen van de adressen. Hierbij gaat het om een onderscheid tussen twee types. Bij een eerste type wordt één enkel rittenplan opgesteld voor de gegeven verzameling van adressen en voertuigen. Dit plan moet dan voldoen aan één van de volgende drie voorwaarden. Ofwel moeten alle opgegeven adressen bezocht worden, ofwel moet een gegeven subset van de adressen bezocht worden, terwijl de rest enkel bezocht wordt indien hiervoor tijd beschikbaar is en dit

winstgevend is voor het bedrijf, ofwel worden de adressen onderverdeeld in subsets en moet van iedere subset minstens één adres bezocht worden. Het tweede type omvat het type VRP waarbij meerdere rittenplannen opgesteld moeten worden gedurende een bepaalde periode.

### 2.2.3.3 Classificatie: voertuigen

Het aantal voertuigen waar het in het rondritplanningsprobleem om gaat vormt de eerste subklasse voor de hoofdklasse "voertuigen". In deze subklasse kunnen twee mogelijkheden onderscheiden worden. Ofwel wordt een constante gebruikt in de probleembeschrijving die het aantal voertuigen specificeert. Deze constante kan enerzijds het maximum aantal te gebruiken voertuigen voorstellen, anderzijds kan de probleembeschrijving verplichten dat alle voertuigen gebruikt moeten worden. De andere mogelijkheid bestaat uit het opnemen van het aantal voertuigen als een variabele van het probleem.

De tweede en derde subklasse vormen samen de fysieke eigenschappen van de voertuigen. Het gaat om de capaciteitsbeperkingen en de ladingsbeperkingen. De voertuigen van de vloot kunnen binnen deze tweede subklasse als eerste mogelijkheid over een onbeperkte capaciteit beschikken, wat echter in praktische problemen niet zal voorkomen. Het VRP kan ook specificeren dat het om een homogene of heterogene vloot gaat op gebied van capaciteit. De vloot kan dus als tweede en derde mogelijkheid bestaan uit voertuigen die alle over dezelfde capaciteit beschikken of uit voertuigen die verschillende capaciteiten bezitten. Wanneer de ladingsbeperkingen worden bekeken, kunnen ook drie mogelijkheden onderscheiden worden: geen compartimenten, onderling verwisselbare compartimenten of vast toegewezen compartimenten. Bij onderling verwisselbare compartimenten kan het bedrijf beslissen in welk compartiment welke goederen worden vervoerd, terwijl bij vast toegewezen compartimenten op voorhand vaststaat in welk compartiment welk type van goederen getransporteerd kan worden.

De tijdsbeperkingen waarmee rekening gehouden moet worden in het '*vehicle routing problem*' worden geformuleerd in de vierde en vijfde subklasse, respectievelijk de planningsbeperkingen en de beperkingen van de duur van de route. In beide subklassen kunnen drie mogelijkheden onderscheiden worden. Logisch gezien bestaat de eerste mogelijkheid voor elk van deze subklassen uit de afwezigheid van beperkingen. De tweede en derde mogelijkheid voor de planningsbeperkingen omvatten respectievelijk het bestaan van identieke of verschillende tijdsvensters voor de voertuigen uit de vloot. De voertuigen uit de vloot zijn immers meestal niet de hele dag beschikbaar. De chauffeurs hebben rusttijd nodig en bovendien moeten de voertuigen onderhouden worden. Per voertuig wordt bijgevolg een reeks tijdsvensters bepaald waarin dit voertuig ter beschikking staat van het bedrijf. Deze tijdsvensters kunnen, zoals reeds vermeld, identiek zijn voor alle voertuigen of van elkaar verschillen. Ook voor de beperking van de routeduur kan dit onderscheid gemaakt worden: gelijke grenzen of verschillende grenzen voor de voertuigen uit de vloot. In het probleem kunnen dus boven- en ondergrenzen gesteld worden aan de totale duurtijd van de routes die een voertuig uitvoert. (Savelsbergh en Sol, 1995)

#### 2.2.3.4 Classificatie: probleemkarakteristieken

Een eerste subklasse van de probleemkarakteristieken omvat het type netwerk waar het rondritplanningsprobleem mee te maken heeft. Als eerste wordt hierbij gekeken naar de eigenschappen van het netwerk, namelijk gaat het om een gericht, een niet-gericht of een gemengd netwerk. Bij een gericht ('*directed*') netwerk zijn alle straten in dit netwerk slechts in één bepaalde richting toegankelijk. Een niet-gericht ('*undirected*') netwerk bestaat daarentegen enkel uit straten die in twee richtingen toegankelijk zijn. In een gemengd ('*mixed*') netwerk komen zowel éénrichtingsstraten als tweerichtingsstraten voor. Vervolgens worden in deze subklasse ook de reistijden beschouwd. Voldoen deze reistijden aan de driehoeksongelijkheid of niet? Met andere woorden is de reistijd wanneer rechtstreeks van punt  $i$  naar punt  $k$  gereden wordt korter dan of gelijk aan de som van de reistijden van punt  $i$  naar punt  $j$  en van punt  $j$  naar punt  $k$  of niet? (Minieka, 1979; Lawler et al., 1987)

De keuze voor de te gebruiken servicestrategie valt onder de tweede subklasse. Onder deze subklasse vallen vier types strategische beslissingen. Een eerste beslissing die hier vermeld wordt, is of het splitsen van de vraag wordt toegelaten of niet. Moet de volledige vraag van een adres in één bezoek voldaan worden of mag een adres meerdere keren aangedaan worden om aan de vraag te kunnen voldoen? Indien toepasselijk bestaat de tweede beslissing uit het al dan niet gebruiken van *'backhauling'* of *'full load routing'*. Wanneer sprake is van een VRP met *'node routing'* en zowel ophalingen als leveringen uitgevoerd moeten worden, dan kan gekozen worden voor *'backhauling'*. Dit wil zeggen dat een voertuig eerst alle leveringen, die het toegewezen kreeg, moet uitvoeren vooraleer het aan de toegewezen ophalingen mag beginnen. In het geval van *'TASK routing'*, kan gekozen worden voor *'full load routing'*, waarbij zich te allen tijde slechts één lading in het voertuig mag bevinden. De derde mogelijke beslissing bestaat uit het al dan niet toestaan van meerdere routes per tijdsperiode per voertuig. Meestal voert elk voertuig binnen een bepaalde tijdsperiode slechts één route uit, maar het rijden van meerdere routes kan dus toegestaan worden. Als laatste type beslissing wordt het al of niet toestaan van multi-depot routes vermeld. In het normale geval keert elk voertuig na het uitvoeren van zijn route terug naar het depot van waaruit het vertrokken is. Bij multi-depot routes hoeft dit niet het geval te zijn en kan een voertuig zijn rit eindigen in een ander depot dan zijn startdepot.

De derde subklasse betreft de mogelijke onderlinge relaties tussen adressen. Bevat het probleem al dan niet precedentierelaties, met andere woorden genieten sommige klanten voorgang op andere klanten, moeten sommige klanten vóór anderen bediend worden? De volgende vraag die hier gesteld wordt, betreft het bestaan van adres-depot beperkingen. Het kan bijvoorbeeld in de gegeven situatie onmogelijk zijn om een bepaald adres rechtstreeks vanuit het depot te bedienen of er kan juist een verplichting bestaan om een adres rechtstreeks vanuit het depot te bedienen. Een derde vraag omvat het bestaan van adres-adres beperkingen. Sommige adressen mogen niet door hetzelfde voertuig bezocht worden en moeten dus in verschillende routes terecht komen of moeten verplicht in dezelfde route bediend worden.

In de vierde subklasse wordt gekeken naar adres-voertuig beperkingen. Hierin kunnen twee types onderscheiden worden, namelijk het al of niet bestaan van depot-voertuig beperkingen en het al of niet bestaan van adres-voertuig beperkingen. Als voorbeeld van een adres-voertuig beperking kan de situatie beschreven worden waarin een bepaalde klant bediend moet worden door een voertuig toegerust met een lostoestel aangezien deze klant niet over een leveringsdok beschikt. Een depot-voertuig beperking kan optreden wanneer de capaciteit van een bepaald voertuig te groot is om door een bepaald depot behandeld te worden.

Voertuig-voertuig beperkingen vormen de vijfde en laatste subklasse. De twee mogelijkheden in deze subklasse zijn de volgende: geen voertuig-voertuig beperkingen of een nood aan synchronisatie tussen voertuigen. Voertuigsynchronisatie is nodig wanneer twee of meerdere voertuigen onderling ladingen moeten uitwisselen of elkaar moeten helpen.

#### 2.2.3.5 Classificatie: doelfuncties

Een eerste subklasse in de hoofdklasse "doelfuncties" geeft de types van wiskundige operatoren die in de doelfunctie van het rondritplanningsprobleem gebruikt worden. De eerste mogelijkheid is het ontbreken van een operator, wanneer geen doelfunctie wordt gespecificeerd. In dit geval wordt enkel gekeken naar de haalbaarheid van een oplossing. Als tweede mogelijkheid wordt de som-operator genoemd, waarbij getracht wordt de som van kosten te minimaliseren. De max-operator vormt de derde mogelijkheid. Bij deze operator wordt getracht de waarde van de duurste (maximale) kost te minimaliseren.

De tweede subklasse bevat de gebruikte functies. Zoals reeds vermeld, bestaat de eerste mogelijkheid uit het ontbreken van een doelfunctie. De tweede mogelijke functie bevat de duur van de route. Een voertuigkostenfunctie is de derde mogelijkheid. Deze functie kan gebruikt worden wanneer binnen het VRP ook een aantal beslissingen rond de vloot genomen moeten worden. Als volgende wordt een strafkostenfunctie voor voertuigen

genoemd. Deze kan gebruikt worden als zachte beperkingen overschreden zouden worden. Zachte beperkingen worden gedefinieerd als beperkingen die tegen een bepaalde kost overschreden mogen worden. Als voorbeeld kunnen de overuren van de chauffeur genoemd worden. Een vierde mogelijkheid wordt gevormd door de adreskostenfunctie. Deze functie omvat de kosten die opgelopen worden wanneer afgeweken wordt van een vooropgesteld, geprefereerd serviceniveau (bvb. de start van de bediening op een locatie mag slechts een maximale procentuele afwijking vertonen van de door de klant gewenste starttijd). Als laatste mogelijkheid kan ook voor de adressen een strafkostenfunctie worden vermeld. Bijvoorbeeld wanneer tegen het betalen van een premie toch buiten de vooropgestelde tijdsvensters aan een klant mag geleverd worden, treedt deze functie in werking. Bijkomende uitleg over gebruikte doelfuncties bij rittenplanningsproblemen volgt in punt 2.3.3 (Doelfuncties).

#### 2.2.3.6 Frequent bestudeerde modellen van het rondritplanningsprobleem

Xu et al. (2003) vermelden drie modellen van het VRP die het meest in de literatuur bestudeerd werden, namelijk het '*capacitated vehicle routing problem*', het '*vehicle routing problem with time windows*' en het '*pickup and delivery problem*'. Het basismodel wordt het '*capacitated vehicle routing problem*', afgekort CVRP, genoemd. Dit model veronderstelt een homogene vloot, waarbij alle voertuigen vanuit hetzelfde depot vertrekken. Ook wordt bij dit model aangenomen dat klanten geen tijdsvensters specificeren waarbinnen ze bediend willen worden. Het tweede model is een uitbreiding op het CVRP, namelijk het '*vehicle routing problem with time windows*', afgekort VRPTW. In dit model specificeren de klanten tijdsvensters die het interval weergeven waarbinnen de bediening op hun locatie moet aanvangen. Het derde en laatste model dat door Xu et al. (2003) vermeld wordt, wordt het '*pickup and delivery problem*', afgekort PDP, genoemd. Dit laatste model is een variant van het VRP met ophaling en levering of het '*vehicle routing problem with pickups and deliveries*', afgekort VRPPD. Het VRPPD is een uitbreiding op het klassieke VRP waarbij de voertuigen uit de vloot niet enkel goederen afleveren bij klanten, maar waarbij ze ook goederen kunnen ophalen op klantenlocaties. De ophaling en levering bij één klant kan ook samen gebeuren, bijvoorbeeld het afzetten van een aantal volle gasflessen op de



bedrijfsterreinen van de klant, terwijl lege gasflessen terug mee worden genomen. Bij het PDP specificeert een transportverzoek één enkele oorsprong en één enkele bestemming voor de lading. Ook hierbij vertrekken alle voertuigen van de vloot uit een centraal depot, waar ze na vervulling van het transportverzoek naar terugkeren. Het PDP is een variant van het VRPPD waarbij elke klant één ophalingspunt en één leveringspunt specificeert, terwijl bij het VRPPD een klant ofwel om een levering vraagt, ofwel om een ophaling, ofwel om beide. (Nagy en Salhi, 2005; Savelsbergh en Sol, 1995; Xu et al., 2003)

#### **2.2.4 Het 'Chinese Postman Problem'**

Het '*Chinese postman problem*' of CPP werd voor het eerst in de literatuur voorgesteld door Meigu Guan in 1962. Het CPP bestaat uit het vinden van de kortste route of de route die de minste kosten met zich meebrengt voor een postbode die zijn post op het postkantoor afhaalt, deze post rondbrengt in het hem toegewezen gebied en daarna terugkeert naar het postkantoor. Hierbij moet hij elke straat in het hem toegewezen gebied minstens één keer bezocht hebben. Een typische indeling van CPP's gebeurt op basis van de richting van de straten. Als alle straten in twee richtingen toegankelijk zijn, wordt over een '*undirected*' of een niet-gericht CPP gesproken. Indien alle straten enkel in één bepaalde richting toegankelijk zijn, wordt gesproken over een '*directed*' of gericht CPP. In het geval zowel éénrichtingsstraten als tweerichtingsstraten bestaan binnen het probleem, gaat het over een '*mixed*' of gemengd CPP. (Eiselt et al., 1995a; Minieka, 1979; Wang en Wen, 2002)

Allerlei types problemen kunnen in het CPP-model gegoten worden. Een aantal voorbeelden hiervan zijn: het bepalen van routes voor politiepatrouilles, het opstellen van routes voor het ophalen van huisvuil en postbezorging. (Minieka, 1979; Ghiani en Improta, 2000)

### **2.2.5 Het 'Rural Postman Problem'**

Het '*rural postman problem*' of RPP bestaat uit het vinden van een route voor een postbode, die, vertrekkend vanuit het postkantoor (depot), een subset van de straten in het aan hem toegewezen gebied minstens één keer moet aandoen en die daarna terugkeert naar het postkantoor (depot). Hierbij moet de totale afstand of de totale kost geminimaliseerd worden. Het RPP is een praktische uitbreiding op het '*Chinese postman problem*', waarbij enkel een deelverzameling van de straten in het toegewezen gebied bezocht moet worden. (Eiselt et al., 1995b; Pearn en Wu, 1995)

Het RPP werd voor het eerst geïntroduceerd door Orloff en het werd door Lenstra en Rinnooy Kan (1976; geciteerd door Fernández et al., 2003) aangetoond dat dit type van probleem NP-hard is. Toepassingen van het RPP kunnen in veel praktische situaties teruggevonden worden. Een aantal voorbeelden hiervan zijn: het bepalen van routes voor voertuigen of mensen die kranten of post aan huis leveren, het opstellen van routes voor sneeuwopruimers en schoolbussen, het regelen van routes voor zoutstrooimachines, het bepalen van routes voor de controle van elektriciteitsmeters. (Eiselt et al., 1995b; Fernández et al., 2003; Pearn en Wu, 1995)

## **2.3 Karakteristieken van rittenplanningsproblemen**

In de volgende paragrafen worden de karakteristieken van een rittenplanningsprobleem besproken. Achtereenvolgens komen de transportverzoeken, de tijdsbeperkingen, de doelfuncties en de oplossingsmethoden aan bod.

### 2.3.1 Transportverzoeken

De wijze waarop de transportverzoeken binnenkomen vormt een belangrijke karakteristiek van rittenplanningsproblemen. Twee soorten situaties kunnen zich voordoen, namelijk statische en een dynamische situaties. In een statische situatie zijn alle transportverzoeken beschikbaar op het moment dat de rittenplanning opgesteld moet worden. In een dynamische situatie zijn sommige transportverzoeken bekend wanneer de rittenplanning wordt opgesteld, maar andere komen binnen terwijl de vloot onderweg is om de bestaande rittenplanning uit te voeren. Elke keer een transportverzoek binnenkomt, dient minstens één van de bestaande routes aangepast te worden, zodat aan het nieuwe verzoek voldaan wordt. Wanneer deze nieuwe optimalisatie doorgevoerd wordt, bevinden de voertuigen van het bedrijf zich onderweg en niet meer in het depot, zodat het begrip depot overbodig wordt. Koerierdiensten kunnen hier als voorbeeld vermeld worden. Wanneer bedrijven zoals DHL, FedEx of TNT zijn koeriers 's morgens uitstuurt, krijgen zij een planning mee van de locaties die zij achtereenvolgens moeten bezoeken. Indien gedurende de dag nieuwe transportverzoeken binnenkomen, worden deze toegewezen aan de koerier die hier het meest efficiënt aan kan voldoen. Deze koerier bevindt zich echter onderweg. Met behulp van de moderne technologie krijgen de koeriers hun route elektronisch toegestuurd en hoeven zij niet meer naar een centraal depot te komen. (Savelsbergh en Sol, 1995)

In de praktijk worden de meeste dynamische rittenplanningsproblemen bekeken als een reeks statische rittenplanningsproblemen. De eenvoudigste vorm hiervan, bestaat uit het opnieuw optimaliseren van de rittenplanning telkens een nieuw transportverzoek binnenkomt. Deze eenvoudigste vorm wordt een 'on-line' algoritme genoemd. Meestal is het echter mogelijk en voordelig om te wachten met het updaten van de rittenplanning. De binnenkomende transportverzoeken worden verzameld in een buffer en de rittenplanning wordt aangepast wanneer de buffergrootte een vooraf bepaalde waarde bereikt. (Savelsbergh en Sol, 1995)

### 2.3.2 Tijdsbeperkingen

In nagenoeg elke praktische situatie waarbij de ophaling en de levering van goederen geregeld moet worden, komen ook beperkingen met betrekking tot tijd voor, naast beperkingen aangaande voertuigcapaciteit en precedentierelaties. Als voorbeeld kan het *'dial-a-ride'* probleem aangehaald worden, waarbij de klanten een tijdstip specificeren waarop ze opgepikt willen worden of waarop ze op hun bestemming willen aankomen. Indien tijdsbeperkingen gespecificeerd worden, kan het probleem van het vinden van een geschikte rittenplanning NP-hard worden. Het is meestal niet gemakkelijk om in situaties met tijdsvensters een geschikt rittenplan op te stellen. Anderzijds kan de aanwezigheid van tijdsbeperkingen een voordeel betekenen voor een optimalisatiemethode aangezien de oplossingsruimte hierdoor verkleind wordt. (Savelsbergh en Sol, 1995)

Savelsbergh en Sol (1995) vermelden verschillende soorten tijdsbeperkingen. Een eerste soort van tijdsvensters hebben betrekking op de transportverzoeken. Hierbij kunnen expliciete en impliciete tijdsvensters voorkomen. Expliciete tijdsvensters bepalen het tijdsinterval waarbinnen een bepaalde locatie bediend moet worden. Dit soort tijdsvensters werd bij punt 2.2.3.2 reeds vermeld. Ook impliciete tijdsvensters kunnen in een probleem voorkomen. Deze tijdsvensters ontstaan vanuit een streven naar klantentevredenheid. Een voorbeeld hiervan kan teruggevonden worden in het *'dial-a-ride'* probleem of, afgekort, DARP. In een dergelijk probleem specificeert de klant bijvoorbeeld een tijdstip waarop hij op zijn bestemming wil arriveren. Omdat de klant niet graag te laat zou komen, moet het reële aankomsttijdstip vroeger liggen of gelijk zijn aan het gespecificeerde tijdstip. Zo wordt een open tijdsvenster gecreëerd. Om te vermijden dat een klant te vroeg aankomt, kan dit open tijdsvenster omgevormd worden tot een gesloten tijdsvenster of kan een mechanisme in de doelfunctie ingebouwd worden zodat afwijkingen van de gespecificeerde tijdstippen bestraft worden.

Een ander type van tijdsbeperking heeft te maken met de voertuigen waarmee de goederen worden opgehaald of geleverd. De voertuigen uit de vloot zijn meestal niet de

hele dag beschikbaar. De chauffeurs hebben rusttijd nodig en bovendien moeten de voertuigen onderhouden worden. Per voertuig kan dus een reeks tijdsvensters bepaald worden, waarin dit voertuig ter beschikking staat van het bedrijf. (Savelsbergh en Sol, 1995)

### 2.3.3 Doelfuncties

Een brede waaier aan doelfuncties kan volgens Savelsbergh en Sol (1995) teruggevonden worden in rittenplanningsproblemen. Deze kunnen ingedeeld worden in doelfuncties voor rittenplanningsproblemen waarbij ofwel één voertuig (*'single-vehicle'*) ofwel meer dan één voertuig (*'multiple-vehicle'*) betrokken is. In de eerste categorie kunnen de volgende doelfuncties teruggevonden worden, die eventueel ook gecombineerd kunnen worden:

- Minimaliseer duur: de duur van een route verwijst naar de totale tijd die een voertuig nodig heeft om de route uit te voeren, hetgeen reistijden, wachttijden, in- en uitlaadtijden en rusttijden inclusief betekent.
- Minimaliseer reistijd: de reistijd van een route kan gedefinieerd worden als de totale tijd die werkelijk aan het reizen, het zich verplaatsen tussen verschillende locaties, gespendeerd wordt.
- Minimaliseer routelengte: routelengte staat voor de totaal afgelegde afstand tussen de verschillende locaties.
- Minimaliseer klantongemak: deze doelfunctie wordt binnen het DARP beschouwd als het minimaliseren van afwijkingen tussen gespecificeerde en werkelijke vertrek- en aankomsttijden; wanneer gevraagd wordt om zo snel mogelijk bediend te worden, wordt gekeken naar de tijd die verstreken is tussen het tijdstip waarop de oproep binnen is gekomen en het tijdstip waarop de klant opgepikt werd.

Bij de doelfuncties voor rittenplanningsproblemen waar meerdere voertuigen in de vloot beschikbaar zijn, kunnen de volgende opgenoemd worden:

- Minimaliseer het aantal voertuigen: deze functie wordt bijna altijd gebruikt in DARP's, in combinatie met een van de bovenstaande doelfuncties om de 'single-vehicle' subproblemen te optimaliseren.
- Maximaliseer winst: dit soort doelfunctie kan elk van de bovenstaande doelfuncties gebruiken en wordt meestal gebruikt in een systeem waarbij het bedrijf kan beslissen om een transportverzoek te weigeren. Hierbij moet dus rekening gehouden worden met de kosten van het vervoer van een bepaalde lading, maar ook met de mogelijke inkomsten die hiermee geassocieerd zijn.

Voor dynamische problemen met ophaling en levering is het niet duidelijk welk type van doelfunctie gebruikt moet worden. Als één of meerdere voertuigen onderweg zijn wanneer de rittenplanning, rekening houdend met nieuw binnengekomen transportverzoeken, opnieuw geoptimaliseerd wordt, is het niet duidelijk hoe begrippen als duurtijd, reistijd, et cetera ingevuld moeten worden. Intuïtief gezien, kan gesteld worden dat beslissingen die invloed hebben op de directe toekomst meer belang zouden moeten krijgen dan beslissingen die handelen over de verre toekomst. (Savelsbergh en Sol, 1995)

#### **2.3.4 Oplossingsmethoden**

Van de meeste rittenplanningsproblemen is het geweten dat ze NP-hard zijn, wat praktisch gezien tot gevolg heeft dat slechts drie mogelijke oplossingsstrategieën gevolgd kunnen worden. Een eerste optie is dat de ogenschijnlijke moeilijkheid van het aan te pakken probleem niet aanvaard wordt en binnen het probleem gezocht wordt naar een speciale structuur, waardoor het probleem in een goed oplosbare subklasse geplaatst kan worden. Indien dit echter niet werkt, bestaat geen garantie dat een optimale oplossing binnen een aanvaardbare tijd gevonden kan worden en moeten dus op één van twee dimensies, namelijk de nauwkeurigheid of de snelheid, toegevingen gedaan worden. Ofwel wordt de focus gelegd op het vinden van een optimale, nauwkeurige oplossing, waarbij het risico gelopen wordt dat hier veel tijd aan besteed moet worden; ofwel wordt de focus gelegd op een snelle oplossingsmethode, waarbij de mogelijkheid van het vinden van een

suboptimale oplossing aanvaard wordt. Deze laatste optie, *'approximation'* of benadering, komt het meest voor in de praktijk. (Lawler et al., 1987)

Nauwkeurigheid en snelheid zijn de twee criteria waarop heuristieken meestal beoordeeld worden. Volgens Cordeau et al. (2002) zijn eenvoud en flexibiliteit echter ook essentiële eigenschappen van goede heuristieken. Bij het kiezen van een heuristiek, omvat de eerste eigenschap waarmee rekening gehouden moet worden de nauwkeurigheid van de heuristiek. Om de nauwkeurigheid van de heuristiek te bepalen, wordt het verschil tussen de waarde van de oplossing die door de heuristiek gevonden wordt en de optimale of de beste gekende waarde (indien geen optimum bekend is) bekeken. De tweede belangrijke eigenschap omvat de snelheid van de heuristiek. Het belang van snelheid is sterk afhankelijk van de context van het rittenplanningsprobleem. Bijvoorbeeld in het geval van een ambulancedienst moet zeer snel een rittenplanning op de tafel gelegd kunnen worden. Aan de andere kant kan het geen kwaad om een lange tijd bezig te zijn met het opstellen van periodieke rittenplanningen die elk enkele maanden omvatten. De behoefte aan snelheid voor de meeste rittenplanningsproblemen zal hier ergens tussen vallen. Als derde wordt de eenvoud van de heuristiek bekeken. Er bestaan verschillende heuristieken die zelden of nooit worden geïmplementeerd omdat ze te moeilijk te begrijpen en te coderen zijn. Als laatste moet bij de keuze van een heuristiek rekening gehouden worden met de flexibiliteit van de heuristiek. Een goede heuristiek moet flexibel genoeg zijn om de verschillende randbependingen die in reële situaties opduiken te kunnen incorporeren. (Cordeau et al., 2002)

Wanneer gewerkt wordt volgens de benaderingsstrategie, wordt gebruik gemaakt van heuristische algoritmen. In de groep van de heuristische algoritmen kunnen drie klassen onderscheiden worden, namelijk constructieheuristieken (*'construction heuristics'*), verbeteringheuristieken (*'improvement heuristics'*) en samengestelde heuristieken (*'composite heuristics'*). (Bodin et al., 1983 - geciteerd door Zeng et al., 2005; Lawler et al., 1987)

Constructieheuristieken worden gebruikt om een toelaatbare oplossing op te stellen door bij elke iteratie nieuwe elementen toe te voegen, terwijl verbeteringsheuristieken gebruikt worden om een bestaande toelaatbare oplossing iteratief te verbeteren. Samengestelde heuristieken kunnen ingedeeld worden in twee klassen, '*cluster-first, route-second*' en '*route-first, cluster-second*' methoden. In de eerste klasse van samengestelde heuristieken worden klanten eerst in clusters gegroepeerd, waarna voor elke cluster een route geconstrueerd wordt. Het omgekeerde geldt voor de tweede klasse waar eerst een route wordt opgesteld die elke klant aandoet, vervolgens wordt deze route dan opgedeeld in toelaatbare deelroutes voor de voertuigen van de vloot. (Bodin et al, 1983 - geciteerd door Zeng et al., 2005; Gendreau en Potvin, 2005; Laporte en Semet, 2002 - geciteerd door Zeng et al., 2005)

De gebruikte heuristieken voor het oplossen van rittenplanningsproblemen behoren meestal tot de klasse van de metaheuristieken. Deze metaheuristieken maken gebruik van de hierboven gemelde constructie- en verbeteringsheuristieken. Een metaheuristiek is een algemeen oplossingschema dat aangepast wordt aan de specificaties van het probleem of de probleemklasse waar het op toegepast wordt. De term werd voor het eerst door Glover (1986) gebruikt. Voor de ontwikkeling van metaheuristieken wordt voor elk probleem een gespecialiseerde heuristiek ontwikkeld, wat in de meeste gevallen meer werk betekende dan het aanpassen van een algemeen schema aan de huidige behoeften. Bovendien is gebleken dat metaheuristieken, bij een goede implementatie, een heel goede kans hebben om binnen een redelijke rekentijd een oplossing te vinden die zich zeer dicht bij het optimum bevindt. Metaheuristieken onderzoeken de oplossingsruimte veel grondiger dan klassieke heuristieken. Metaheuristieken laten namelijk bewegingen naar inferieure en soms zelfs ontoelaatbare oplossingen toe en laten ook het combineren van reeds gevonden oplossingen toe. (Bräysy en Gendreau, 2005b; Cordeau et al., 2002; Gendreau en Potvin, 2005)

Routeconstructieheuristieken (*'route construction heuristics'*), gebruikt door metaheuristieken voor rittenplanningsproblemen, voegen per iteratie een locatie toe aan



het rittenplan totdat een geschikte oplossing is gevonden. De locatie die wordt toegevoegd, wordt gekozen op basis van de vooropgestelde doelstelling en kan slecht toegevoegd worden als aan de beperkingen van het model voldaan wordt. Binnen deze heuristieken kan nog een onderscheid gemaakt worden tussen sequentiële modellen (het model stelt één route op) en parallelle methoden (meerdere routes worden tegelijkertijd opgesteld). De gebruikte routeverbeteringsmethoden (*'route improvement methods'*) of lokale zoekmethoden (*'local search methods'*) vertrekken vanuit een toelaatbare oplossing en willen deze iteratief verbeteren door het onderzoeken van de omgeving van deze oplossing. Wanneer een betere oplossing gevonden wordt, wordt de zoektocht voortgezet door een onderzoek van de omgeving van deze en niet de initiële oplossing. (Bräysy en Gendreau, 2005a; Lu en Dessouky, 2006)

Cordeau et al. (2002) stellen dat van de bestaande metaheuristieken de *'tabu search'* algoritmen duidelijk naar voor komen als de beste metaheuristieken voor het rondritplanningsprobleem. Meer uitleg over *'tabu search'* algoritmen en andere metaheuristieken, samen met verwijzingen naar specifieke literatuur, kan teruggevonden worden in onder andere Bräysy en Gendreau (2005b), Cordeau et al. (2002) en Gendreau en Potvin (2005).

Oplossingsmethoden kunnen ook opgedeeld worden volgens het statische of dynamische karakter van het probleem. Ook kan een onderscheid gemaakt worden volgens de grootte van de vloot, namelijk of deze uit slechts één vrachtwagen of uit meerdere voertuigen bestaat. Een opdeling kan ook gemaakt worden op basis van de aan- of afwezigheid van expliciete tijdsvensters. (Savelsbergh en Sol, 1995)

## Hoofdstuk 3: Rittenplanning met ophaling en levering

### 3.1 Inleiding

Zoals in het vorige hoofdstuk al vermeld werd, is het '*vehicle routing problem with pickups and deliveries*', afgekort VRPPD, of het rondritplanningsprobleem met ophaling en levering een uitbreiding op het klassieke rondritplanningsprobleem waarbij de voertuigen uit de vloot niet enkel goederen afleveren bij klanten, maar waarbij ze ook goederen kunnen ophalen op klantenlocaties. Klanten kunnen zowel goederen ontvangen als verzenden. Een klant vraagt ofwel om een levering, ofwel om een ophaling, ofwel om beide. De ophaling en de levering bij een klant kunnen ook gedurende één bezoek gebeuren, bijvoorbeeld het afzetten van een aantal volle gasflessen op de bedrijfsterreinen van de klant, terwijl lege gasflessen terug mee worden genomen. Gewoonlijk wordt verondersteld dat de goederen op de klantenlocaties niet rechtstreeks bij een andere klant afgezet kunnen worden. Alle goederen zijn met andere woorden afkomstig van het depot of worden naar het depot gebracht. Een andere veel voorkomende veronderstelling bij dit type van problemen, bestaat erin dat het aantal voertuigen in de vloot niet vooraf vastligt. (Nagy en Salhi, 2005)

Een veel in de literatuur voorkomende variant van het VRPPD is het '*pickup and delivery problem*' of PDP. Bij dit probleem specificeert elke klant in zijn transportverzoek één oorsprong en één bestemming voor de lading die vervoerd moet worden. Elk transportverzoek heeft dus één ophalingspunt en één leveringspunt. Een rittenplan moet worden opgesteld zodat aan alle transportverzoeken voldaan wordt, waarbij de oorspronglocatie van het transportverzoek bezocht moet worden vooraleer de eraan verbonden bestemmingslocatie bezocht kan worden. Het PDP is dus een soort veelvoudig handelsreizigersprobleem met precedentierelaties. De extra beperking dat de oorspronglocatie van een transportverzoek bezocht moet worden voor de overeenkomstige

bestemmingslocatie wordt immers toegevoegd. (Ruland en Rodin, 1997; Savelsbergh en Sol, 1995)

### ***3.2 Drie modellen voor het rondritplanningsprobleem met ophaling en levering***

#### ***3.2.1 Levering eerst, ophaling daarna of 'delivery-first, pickup-second'***

Een eerste model wordt het *'delivery-first, pickup-second'* VRPPD genoemd. Het model maakt de veronderstelling dat klanten opgedeeld kunnen worden in *'linehauls'* of klanten die goederen wensen te ontvangen en *'backhauls'*, namelijk klanten die goederen willen verzenden. Zoals in de inleiding reeds werd aangehaald, wordt hierbij aangenomen dat de vloot slechts ophalingen kan uitvoeren nadat alle leveringen gebeurd zijn. Een mogelijke reden hiervoor bestaat uit het feit dat het vrij moeilijk kan zijn om de opgehaalde en de te leveren goederen te herschikken op de vrachtwagen. Ook wordt het probleem vergemakkelijkt door deze veronderstelling, aangezien geen ophalingen aanvaard worden voordat alle leveringen gedaan zijn, bestaat er geen risico dat het voertuig boven zijn capaciteit geladen wordt tijdens de route. (Nagy en Salhi, 2005)

Dit soort probleem werd oorspronkelijk bestudeerd in de context van leveringen aan kruidenierswinkels. Groothandelaars wilden hun kosten verlagen door de voertuigen, die de hun toegewezen leveringen reeds hadden uitgevoerd, langs een, gewoonlijk klein, aantal leveranciers te laten rijden om daar goederen op te halen. (Dethloff, 2001)

#### ***3.2.2 Gemengde ophalingen en leveringen of 'mixed pickups and deliveries'***

Een VRPPD waarbij *'linehauls'* en *'backhauls'* in willekeurige volgorde voorkomen, wordt een gemengd VRPPD genoemd. Hierbij wordt nog altijd verondersteld dat een klant enkel

ophaling of levering wenst en geen behoefte heeft aan deze twee diensten samen. Deze categorie plus de categorie *'delivery-first, pickup-second'* worden samen ook wel *'vehicle routing problems with backhauling'* of VRPB's genoemd. Het VRPB handelt dus over het, met behulp van een vloot vrachtwagens, leveren van afgewerkte goederen vanuit een depot aan een aantal leveringspunten en het oppikken van terug te nemen goederen, die naar het depot worden gebracht. Leveringspunten vallen hierbij nooit samen met locaties waar goederen opgehaald moeten worden. (Nagy en Salhi, 2005; Mitra, 2005)

### **3.2.3 Gelijktijdige ophalingen en leveringen of *'simultaneous pickups and deliveries'***

Een VRPPD met gelijktijdige ophaling en levering wordt ook wel *'vehicle routing problem with simultaneous delivery and pick-up'* (VRPSDP) of het *'vehicle routing problem with simultaneous pick-up and delivery'* (VRP\_SPD) genoemd. Dit soort probleem werd door Min (1989, geciteerd door Nagy en Salhi, 2005) in de literatuur geïntroduceerd. Bij een VRPPD met gelijktijdige ophaling en levering kunnen klanten zowel goederen verscheppen als goederen ontvangen. Dit soort probleem kan binnen hetzelfde kader opgelost worden als een gemengd VRPPD. Een gemengd VRPPD kan immers beschouwd worden als een probleem met gelijktijdige ophaling en levering waarbij bij elke klant ofwel de vraag naar levering van goederen nul is of de vraag naar ophaling van goederen nul is. Anderzijds kunnen de klanten in een systeem met gelijktijdige ophaling en levering opgesplitst worden in entiteiten die enkel ophaling of levering wensen. (Dethloff, 2001; Nagy en Salhi, 2005; Tang Montané en Diéguez Galvão, 2006)

### ***3.3 Andere opdelingen van rondritplanningsproblemen met ophaling en levering***

De voorgaande modellen kunnen gezien worden als één wijze om de verzameling rondritplanningsproblemen met ophaling en levering op te delen. In de literatuur wordt tevens een onderscheid gemaakt tussen 'single-depot' en 'multi-depot' VRPPD's. Bij 'single-depot' problemen wordt slechts met één depot gewerkt, waar alle te leveren goederen vertrekken en alle opgehaalde goederen afgezet worden. In het tweede geval, namelijk 'multi-depot' problemen, heeft het bedrijf meerdere depots ter beschikking. Een derde opdeling in de literatuur wordt gemaakt tussen problemen met één of met meer dan één vrachtwagens in de vloot, met andere woorden een onderscheid tussen 'single-vehicle' en 'multi-vehicle' problemen. Een vierde onderscheid in de literatuur betreft het onderscheid tussen statische en dynamische problemen. Bij statische problemen zijn alle transportverzoeken voor een bepaalde perioden gekend op het moment dat de rittenplanning voor die periode opgesteld wordt. In het dynamische geval komen nog transportverzoeken binnen terwijl de vloot reeds bezig is met de uitvoering van een bepaald rittenplan. Deze transportverzoeken moeten in het bestaande rittenplan ingevoegd worden. Een vijfde en laatste onderscheid wordt gemaakt op basis van het deterministische of stochastische karakter van de vraag in het probleem. (Savelsbergh en Sol, 1995)

### ***3.4 Wiskundige formulering van een algemeen model voor rittenplanningsproblemen met gecombineerde ophaling en levering***

Nu de verschillende opdelingen van 'vehicle routing problems with pickups and deliveries' vermeld werden, kan een algemeen wiskundig model voor een VRPPD (Savelsbergh en Sol, 1995) besproken worden. Om het model op te stellen, wordt gebruik gemaakt van een aantal symbolen en variabelen die in de volgende tabellen verklaard worden.

Tabel 1: Gebruikte symbolen en definities in het wiskundig model van het VRPPD

$x$	Een rittenplan
$f(x)$	De prijs van rittenplan $x$ volgens een bepaalde doelfunctie $f$
$N$	Verzameling transportverzoeken
$i \in N$	Index voor 1 bepaald transportverzoek
$\mathfrak{N}$	Verzameling natuurlijke getallen
$\bar{q}_i (\in \mathfrak{N})$	Grootte van de te vervoeren lading van transportverzoek $i$
$N_i^+$	Verzameling oorspronglocaties van transportverzoek $i$
$N_i^-$	Verzameling bestemmingslocaties van transportverzoek $i$
$\bar{q}_i = \sum_{j \in N_i^+} q_j = - \sum_{j \in N_i^-} q_j$	Opdeling van een lading horend bij transportverzoek $i$ : positief voor ophalingen, negatief voor leveringen
$N^+ \equiv \bigcup_{i \in N} N_i^+$	Definitie van $N^+$ als zijnde de verzameling van oorsprongen
$N^- \equiv \bigcup_{i \in N} N_i^-$	Definitie van $N^-$ als zijnde de verzameling van bestemmingen
$V \equiv N^+ \cup N^-$	Definitie van $V$ als zijnde de unie van $N^+$ en $N^-$
$M$	Verzameling van alle vrachtwagens
$k \in M$	Index voor 1 bepaalde vrachtwagen
$Q_k \in \mathfrak{N}$	Capaciteit van vrachtwagen $k$
$k^+$	Startlocatie van vrachtwagen $k$
$k^-$	Eindlocatie van vrachtwagen $k$
$M^+ \equiv \{k^+   k \in M\}$	Definitie van $M^+$ als zijnde de verzameling van startlocaties
$M^- \equiv \{k^-   k \in M\}$	Definitie van $M^-$ als zijnde de verzameling van eindlocaties
$W \equiv M^+ \cup M^-$	Definitie van $W$ als zijnde de unie van $M^+$ en $M^-$
Definieer $q_{k^+} = 0$ voor alle $k \in M$	

Tabel 2: Gebruikte variabelen in het wiskundig model van het VRPPD

$z_i^k$ met $i \in N$ en $k \in M$	= 1 als transportverzoek $i$ toegewezen wordt aan vrachtwagen $k$ = 0 anders
$x_{ij}^k$ met $(i, j) \in (V \times V) \cup \{(k^+, j) \mid j \in V\} \cup \{(j, k^-) \mid j \in V\}$ en $k \in M$	= 1 als vrachtwagen $k$ van locatie $i$ naar locatie $j$ rijdt = 0 anders
$D_i$ met $i \in V \cup W$	Vertrektijd op locatie $i$
$y_i$ met $i \in V \cup W$	Lading van de vrachtwagen die arriveert op locatie $i$

De bedoeling van het model is een bepaalde doelfunctie te minimaliseren, bijvoorbeeld de kosten geassocieerd met de rittenplanning, de gereden afstand of een andere doelfunctie (zie hoofdstuk 2, punt 2.3.3).

In het algemene model van Savelsbergh en Sol (1995) wordt vervolgens gebruik gemaakt van 14 beperkingen. Beperking (1) zorgt ervoor dat elk transportverzoek aan exact één vrachtwagen wordt toegewezen. Alle transportverzoeken moeten immers voldaan worden en een transportverzoek kan niet opgesplitst worden. Een vrachtwagen mag enkel op een locatie  $l$  aankomen of vertrekken als deze locatie een oorsprong of bestemming is van een transportverzoek dat aan deze vrachtwagen is toegewezen, hier zorgt beperking (2) voor. Om vervolgens te verzekeren dat elke vrachtwagen start en aankomt op de juiste plaats worden beperkingen (3) en (4) ingevoerd. Beperkingen (5), (6), (7) en (13) vormen samen de beperkingen die ervoor zorgen dat de intrinsieke volgorde van de ritten wordt gerespecteerd (*precedence constraints*). Als laatste vormen (8), (9), (10) en (14) de beperkingen die verzekeren dat de capaciteit van de vrachtwagens op geen enkel moment overschreden wordt.

Minimaliseer  $f(x)$

Onderworpen aan de beperkingen:

$$\sum_{k \in M} z_i^k = 1 \quad \forall i \in N \quad (1)$$

$$\sum_{j \in V \cup W} x_{ij}^k = \sum_{j \in V \cup W} x_{jl}^k = z_i^k \quad \forall i \in N, \forall l \in N_i^+ \cup N_i^-, \forall k \in M \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V \cup \{k^+\}} x_{k^+j}^k = 1 \quad \forall k \in M \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V \cup \{k^+\}} x_{jk^+}^k = 1 \quad \forall k \in M \quad (4)$$

$$D_{k^+} = 0 \quad \forall k \in M \quad (5)$$

$$D_p \leq D_q \quad \forall i \in N, \forall p \in N_i^+, \forall q \in N_i^- \quad (6)$$

$$x_{ij}^k = 1 \Rightarrow D_i + t_{ij} \leq D_j \quad \forall i, j \in V \cup W, \forall k \in M \quad (7)$$

$$y_{k^+} = 0 \quad \forall i, j \in V \cup W, \forall k \in M \quad (8)$$

$$y_l \leq \sum_{k \in M} Q_k z_i^k \quad \forall i \in N, \forall l \in N_i^+ \cup N_i^- \quad (9)$$

$$x_{ij}^k = 1 \Rightarrow y_i + q_i = y_j \quad \forall i, j \in V \cup W, \forall k \in M \quad (10)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V \cup W, \forall k \in M \quad (11)$$

$$z_i^k \in \{0,1\} \quad \forall i \in N, \forall k \in M \quad (12)$$

$$D_i \geq 0 \quad \forall i \in V \cup W \quad (13)$$

$$y_i \geq 0 \quad \forall i \in V \cup W \quad (14)$$

(bron: Savelsbergh en Sol, 1995: p. 18-19)

### 3.5 Ophaling en levering met tijdsvensters

#### 3.5.1 Inleiding

In reële situaties komt het bestaan van tijdsvensters bij ophalingen en/of leveringen veelvuldig voor. Bedrijven werken namelijk bijna altijd met vooropgestelde tijdschema's.



Bijvoorbeeld een bedrijf dat volgens *'just-in-time'* principes werkt, heeft meestal specifieke eisen in verband met het tijdstip waarop de levering van materialen moet gebeuren. Een ander voorbeeld zijn de leveringen en/of ophalingen van geld bij bankkantoren. Deze leveringen en/of ophalingen gebeuren meestal voor of na opening van het kantoor of tijdens de lunchpauze. Alvorens overgegaan wordt naar het meer algemene *'pickup and delivery problem with time windows'*, afgekort PDPTW, volgt eerst een bespreking van het rondritplanningsprobleem met tijdsvensters of het VRPTW.

### **3.5.2 Het rondritplanningsprobleem met tijdsvensters**

Het klassieke rondritplanningsprobleem omvat het opstellen van een rittenplan voor een vloot vrachtwagens, die alle vertrekken vanuit en terugkeren naar een centraal depot. Alle klanten, met gekende vraag, moeten in de oplossing bediend worden en elke klant wordt slechts één keer bezocht. Als laatste moet ook rekening gehouden worden met het feit dat de capaciteit van de vrachtwagen niet overschreden mag worden. Wanneer tijdsvensters opduiken in het VRP, moet bovendien rekening gehouden worden met de, door de klanten opgelegde, aanvaardbare leveringstijden. Een tijdsvenster bepaalt namelijk de vroegst en laatst toelaatbare begintijd van de service op de klantenlocatie. Een opmerking hierbij is dat de begintijden van de service op de klantenlocaties in dit type probleem beslissingsvariabelen worden. Een extra opmerking bij aanwezigheid van tijdsvensters, is dat ook rekening gehouden moet worden met de kosten van wachttijden (bvb. wanneer de vrachtwagen te vroeg arriveert op de klantenlocatie) en niet enkel met de kosten van de ritten zelf. (Dumas et al., 1991; Kolen et al., 1987; Solomon, 1987)

Ondanks het feit dat tijdsvensters vaak voorkomen in de praktijk, heeft het rondritplanningsprobleem met tijdsvensters lange tijd minder aandacht gekregen dan het VRP (Kolen et al., 1987). De eerste auteur die het rondritplanningsprobleem met tijdsvensters bestudeerde, was Solomon (1987). Aangezien het VRPTW een NP-hard probleem is, volgend uit het feit dat het VRP NP-hard is, werd door deze auteur vooral aandacht gegeven aan het vinden van goede heuristische oplossingsalgoritmen. Solomon

(1987) presenteert uitbreidingen van bestaande heuristieken voor het rondritplanningsprobleem, waarbij rekening gehouden wordt met de in het VRPTW opgelegde tijdsbeperkingen.

Solomon (1987) houdt het bij een heuristische aanpak, terwijl Kolen et al. (1987) als eersten een optimalisatiemethode voor het '*vehicle routing problem with time windows*' bespreken. Deze auteurs stellen in hun artikel een '*branch-and-bound*' algoritme voor om het VRPTW optimaal op te lossen. De bedoeling van dit '*branch-and-bound*' algoritme bestaat uit het vinden van een set van toelaatbare routes voor de vrachtwagens van de vloot zodat de totale lengte van deze routes geminimaliseerd wordt.

### **3.5.3 Het '*pickup and delivery problem*' met tijdsvensters**

Het '*pickup and delivery problem with time windows*', afgekort PDPTW, vormt een veralgemening van het rondritplanningsprobleem met tijdsvensters. Bij het PDPTW gaat het om het vinden van een set van optimale routes, die aan de transportverzoeken van de klanten moeten voldoen. Elk transportverzoek bestaat hierbij uit een ophaling op een oorspronglocatie en een levering op een bestemmingspunt. Bovendien moet rekening gehouden worden met capaciteits- en tijdsbeperkingen, met opgelegde precedentierelaties en met het feit dat oorsprong én bestemming van een transportverzoek door dezelfde vrachtwagen bediend moeten worden, aangezien de te vervoeren lading van de oorsprong naar de bestemming gebracht dient te worden. (Dumas et al., 1991; Nanry en Barnes, 2000)

In het vervolg van deze paragraaf worden een aantal artikels, waarin een oplossingsmethode voor het PDPTW wordt voorgesteld, kort besproken. In een eerste artikel presenteren Nanry en Barnes (2000) een oplossingsmethode via een '*reactive tabu search*' algoritme. Een tweede artikel, van Gronalt et al. (2003), stelt vier verschillende heuristieken, gebaseerd op het spaaralgoritme van Clarke en Wright (1964), voor. In het

derde en laatste artikel maken Lu en Dessouky (2006) gebruik van een invoegheuristiek om het PDPTW op te lossen.

#### 3.5.3.1 Een 'reactive tabu search' algoritme voor het PDPTW (Nanry en Barnes, 2000)

Nanry en Barnes (2000) behandelen een '*pickup and delivery*' probleem met een homogene vloot en één depot. Elk transportverzoek bestaat uit een ophaling op een bepaalde locatie, waarna de opgehaalde lading op een gekoppelde bestemming wordt geleverd. De bediening op beide locaties dient in de respectievelijke tijdsvensters te vallen. Op elke locatie worden laadtijden opgelopen. De ophaling moet steeds vóór de gekoppelde levering gebeuren (precedentierelaties) en de gekoppelde locaties moeten door hetzelfde voertuig bediend worden ('*coupling constraints*').

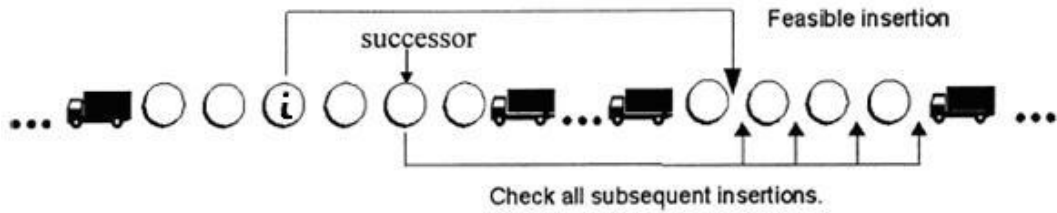
Klassieke '*tabu search*' algoritmen zijn gebaseerd op het uitvoeren van een '*local search*'. Per iteratie wordt, vertrekkende vanuit de *huidige* oplossing, gezocht naar de beste *nieuwe* oplossing in de omgeving van deze huidige oplossing. De doelfunctiewaarde van deze *nieuwe* oplossing kan verslechterd zijn ten opzichte van de doelfunctiewaarde van de *huidige* oplossing, waardoor een mechanisme ingevoerd moet worden om te vermijden dat een vicieuze cirkel ontstaat. Dit mechanisme bestaat uit het taboe verklaren van alle oplossingen die een bepaalde eigenschap van de *huidige* oplossing bezitten voor de duur van een vooraf bepaald aantal iteraties, waardoor deze oplossingen gedurende dit aantal iteraties niet geselecteerd kunnen worden. (Cordeau et al., 2002; Glover et al., 1993)

'*Reactive tabu search*' werd ontwikkeld door Battiti en Tecchiolli (1994). Bij '*reactive tabu search*' staat het algoritme toe dat de zoekparameters automatisch aangepast worden op basis van de toestand en de kwaliteit van het reeds uitgevoerde deel van de zoektocht. De waarden van de zoekparameters zijn dus niet langer constanten of elementen uit een beperkte verzameling van mogelijke parameterwaarden. Bovendien biedt het '*reactive tabu search*' algoritme meer mogelijkheden om uit vicieuze cirkels te ontsnappen, bijvoorbeeld doordat het aantal iteraties, gedurende dewelke bepaalde oplossingen taboe zijn, aangepast kan worden aan de situatie. (Nanry en Barnes, 2000)

Om een initiële oplossing te bepalen als startpunt voor het *'reactive tabu search'* algoritme, wordt door Nanry en Barnes (2000) een eenvoudig invoegalgoritme gebruikt. Dit invoegalgoritme probeert een *'predecessor-successor'* (*'predecessor'* staat voor de ophaling, *'successor'* voor de levering) paar, afgekort P-S paar, toe te voegen aan de route van de eerste vrachtwagen. Als meerdere toelaatbare paren toegevoegd kunnen worden, wordt het paar gekozen dat de kleinste verhoging van de totale reisduur van de gedeeltelijke oplossing veroorzaakt. Daarna wordt getracht om op een toelaatbare manier de rest van P-S paren aan de vrachtwagen toe te voegen. Wanneer geen verdere toevoegingen aan de route van de eerste vrachtwagen mogelijk zijn, wordt een nieuwe vrachtwagenroute gecreëerd. Deze procedure loopt verder tot alle paren aan een route zijn toegevoegd.

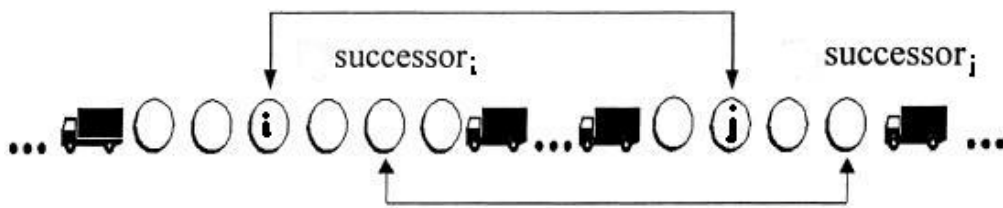
Nadat de initiële oplossing gevonden is, worden achtereenvolgens drie zoekmethodes voor de verbetering van de oplossing gebruikt: *'single paired insertion'* of SPI, *'swapping pairs between routes'* of SBR en *'within route insertion'* of WRI.

De eerste zoekmethode, SPI, verplaatst P-S paren van hun huidige plaats in een vrachtwagenroute naar een andere vrachtwagenroute uit de voorlopige oplossing. Voor elke ophaling in de huidige oplossing wordt geprobeerd deze ophaling aan een andere vrachtwagenroute dan de huidige toe te voegen. Hierbij moet na het toevoegen van de ophaling aan de tijdsvenster- en capaciteitsbeperkingen voldaan zijn voor de nieuw gevormde route. Wanneer dit het geval is, wordt de gekoppelde levering na de ophaling in de route ingevoegd, waarbij alle mogelijke plaatsingen voor de levering in de nieuwe route worden geprobeerd (zie figuur 1, waarbij  $i$  de oorspronkelijke locatie van de ophaling voorstelt). Door de plaatsing van de levering is mogelijk niet langer voldaan aan de tijdsvenster- en capaciteitsbeperkingen. Met deze mogelijkheid wordt rekening gehouden door het toevoegen van straffkosten in de berekening van de verandering in de doelfunctiewaarde door de verplaatsing.



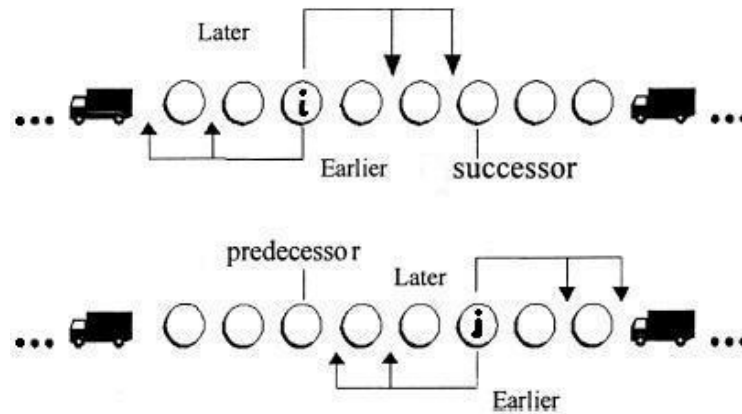
Figuur 1: 'Single paired insertion' of SPI (Nanry en Barnes, 2000: p. 112)

De tweede zoekmethode, SBR, verwisselt de plaatsing van twee ophaling-levering paren uit twee verschillende routes (zie figuur 2, waarbij  $i$  en  $j$  de locaties van de ophalingen voorstellen). Nadat twee ophalingen van plaats gewisseld zijn, wordt geen poging gedaan om de beste plaatsing te vinden voor het invoegen van de gekoppelde leveringen, aangezien dit in de derde zoekmethode gebeurt. Ontoelaatbare oplossingen mogen voorkomen, aangezien in deze zoekmethode de samenstelling van de routes veranderd wordt en er niet gekeken wordt naar de toelaatbaarheid van de oplossing.



Figuur 2: 'Swapping pairs between routes' of SBR (Nanry en Barnes, 2000: p. 113)

De derde en laatste zoekmethode, WRI, verplaatst individuele ophalingen of leveringen naar voor of naar achter in hun respectievelijke routes (zie figuur 3, waarbij  $i$  de oorspronkelijke locatie van een ophaling voorstelt en  $j$  de oorspronkelijke locatie van een levering aanduidt). Deze zoekmethode probeert de ophalingen en leveringen te herschikken zodat bestaande ontoelaatbaarheden verkleinen of verdwijnen of zodat de doelfunctie verbetert voor toelaatbare oplossingen. Bij de herschikkingen moeten de precedentierelaties tussen gekoppelde ophalingen en leveringen gerespecteerd worden.



Figuur 3: 'Within route insertion' of WRI (Nanry en Barnes, 2000: p. 113)

Bij elk van de beschreven zoekmethodes kunnen de, na toepassing van een van de zoekmethodes gevonden, *nieuwe* oplossingen taboe verklaard worden. De procedure wordt beschreven in Nanry en Barnes (2000: p. 114 e.v.).

### 3.5.3.2 Vier, op het spaaralgoritme gebaseerde, heuristieken (Gronalt et al., 2003)

Het artikel van Gronalt et al. (2003) behandelt 'time constrained pickup and delivery of full truckloads'. Deze auteurs bespreken dus mogelijke heuristische oplossingsmethoden voor een PDPTW waarbij de vrachtwagens telkens met een volledige lading rijden. In het probleem dienen een vloot vrachtwagens, die zich in verschillende distributiecentra bevinden, een aantal transportverzoeken te voldoen. Elk transportverzoek bestaat uit het vervoeren van een lading tussen twee distributiecentra.

Het model bevat vijf onderliggende veronderstellingen. De eerste veronderstelling bepaalt dat alle transportverzoeken gekend zijn voordat het rittenplan opgesteld wordt. Het betreft hier een statisch probleem. Als tweede wordt verondersteld dat telkens volledige vrachtwagenladingen vervoerd moeten worden, zodat op elk ogenblik hoogstens één te vervoeren lading in de vrachtwagen aanwezig is. Een derde veronderstelling stelt dat de tijdsvensters voor de ophaling en de levering van de lading strikt gerespecteerd moeten worden. Overschrijdingen van de tijdsvensters worden niet toegestaan. Als vierde punt

wordt verondersteld dat een vrachtwagenroute een bepaalde tijdsduur niet mag overschrijden, met andere woorden de vrachtwagen heeft een beperkte tijds capaciteit. Deze veronderstelling volgt uit het bestaan van legale beperkingen van de maximumtijd dat een vrachtwagenchauffeur mag rijden, maar kan ook gezien worden als een beperking die zorgt dat de onderhoudsintervallen voor de vrachtwagens gerespecteerd worden. De vijfde en laatste veronderstelling stelt dat elke vrachtwagen aan een specifiek distributiecentrum wordt toegewezen, waarnaar deze vrachtwagen ook moet terugkeren na het uitvoeren van zijn route. (Gronalt et al., 2003)

Onder deze veronderstellingen zijn de meerdere routestructuren mogelijk. Ten eerste kan een route bestaan uit het vervullen van slechts één transportverzoek, waarbij na de levering de vrachtwagen leeg naar zijn beginpositie terugkeert. Indien mogelijk worden echter meerdere transportverzoeken in één route geplaatst. Dit kan op drie manieren gebeuren. Als eerste kan een vrachtwagen na een levering in een distributiecentrum op deze locatie een nieuwe lading ophalen en deze aan een ander distributiecentrum leveren. Ten tweede kan de vrachtwagen na het uitvoeren van de levering in een distributiecentrum onmiddellijk verder rijden naar een ander distributiecentrum om daar een nieuwe lading op te halen. De derde en laatste optie voor de vrachtwagen is om op de locatie van het laatst bezochte distributiecentrum te wachten op een nieuwe opdracht. Deze mogelijke routestructuren leiden tot drie verschillende types van vrachtwagenbewegingen. Deze drie types vrachtwagenbewegingen zijn ritten met volledige lading, lege ritten om twee transportverzoeken met elkaar te verbinden en lege ritten om de vrachtwagenroute te beëindigen (terugkeer naar het startpunt).

Gronalt et al. (2003) stellen in hun artikel vier heuristieken voor, die alle gebaseerd zijn op het spaaralgoritme van Clarke en Wright (1964). De auteurs stellen enkele aanpassingen voor om de prestaties van het spaaralgoritme te verbeteren, waarbij de focus vooral ligt op de introductie van opportuniteitskosten.

Het spaaralgoritme werd door Clarke en Wright (1964) voorgesteld als een heuristische oplossingsmethode voor het rondritplanningsprobleem. Het algoritme begint met een toewijzing van elk transportverzoek aan een aparte vrachtwagen. Daarna worden voor elk mogelijk paar transportverzoeken de besparing berekend die gerealiseerd kan worden door deze twee transportverzoeken in één route samen te voegen. Beginnend met de combinatie die de grootste besparing oplevert, worden de transportverzoeken samengevoegd in routes totdat verdere besparingen niet meer mogelijk zijn. Het spaaralgoritme werd ontworpen voor de basisvorm van het rondritplanningsprobleem, namelijk het '*capacitated vehicle routing problem*' (CVRP). Het CVRP veronderstelt een homogene vloot, die vertrekt vanuit en terugkeert naar één centraal depot, en veronderstelt tevens de afwezigheid van tijdsvensters. In het probleem dat door Gronalt et al. (2003) wordt omschreven, is sprake van meerdere depots en van tijdsvensters die strikt gerespecteerd dienen te worden, waardoor het originele spaaralgoritme niet toegepast kan worden. (Clarke en Wright, 1964; Gronalt et al., 2003)

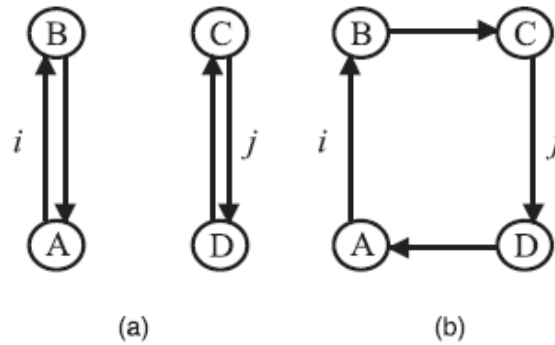
Het berekenen van de besparingen gebeurt in Gronalt et al. (2003) voor elke combinatie van twee transportverzoeken. Dit is in tegenstelling tot de besparingen in Clarke en Wright (1964), die berekend worden voor elke combinatie van twee locaties. Bij het model van Gronalt et al. (2003) hangen aan elk transportverzoek twee locaties vast, waardoor het berekenen van een besparing voor een combinatie van twee locaties niet correct zou zijn. Wanneer de besparing berekend moet worden voor het combineren van transportverzoek  $i$  (van A naar B) met transportverzoek  $j$  (van C naar D), wordt de besparing als volgt berekend:

$$S(i, j) = \text{kost}(B, A) + \text{kost}(D, C) - \alpha \cdot \text{kost}(B, C) - \text{kost}(D, A)$$

In deze formulering staat de functie  $\text{kost}(X, Y)$  voor de vervoerkosten tussen de locaties  $X$  en  $Y$ , terwijl  $\alpha$  een wegingsparameter voor de verbindingsrit tussen de twee transportverzoeken, waarbij de vrachtwagen leeg is, voorstelt. Deze parameter werd ingevoerd naar voorbeeld van Solomon (1987). Een opmerking hierbij is dat de kost van de rit om de route te sluiten, namelijk  $\text{kost}(D, A)$ , niet gewogen wordt, aangezien deze



rit vermeden kan worden wanneer in een latere iteratie een ander transportverzoek aan de route wordt toegevoegd na transportverzoek  $j$ . In figuur 4 wordt deze situatie afgebeeld. Figuur 4(a) toont de ritten die nodig waren voor de combinatie van transportverzoek  $i$  en transportverzoek  $j$ , terwijl figuur 4(b) de nodige ritten na de combinatie weergeeft.



Figuur 4: De combinatie van transportverzoeken  $i$  en  $j$  (Gronalt et al., 2003: p. 526)

Na het combineren van twee transportverzoeken in één route, is het nodig om alle besparingen, die met deze transportverzoeken verbonden zijn, opnieuw te berekenen. Wanneer bijvoorbeeld de besparing door de combinatie van transportverzoek  $k$  (van A naar C) en transportverzoek  $j$  bekeken wordt, is deze vóór de combinatie van  $i$  en  $j$  gelijk aan:

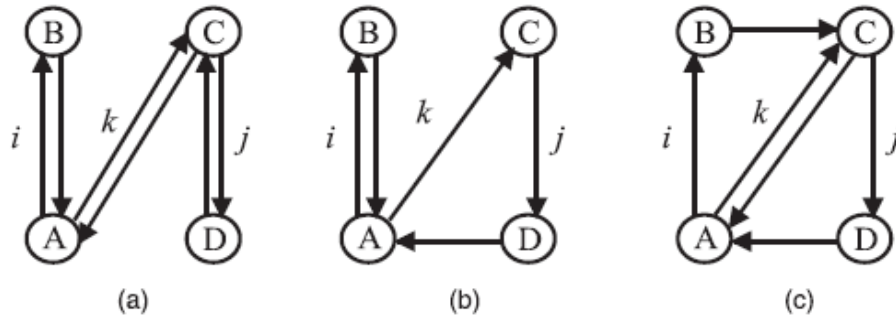
$$S(j, k) = \text{kost}(D, C) + \text{kost}(C, A) - \alpha \cdot \text{kost}(D, A)$$

In deze situatie wordt de route automatisch gesloten na het uitvoeren van transportverzoek  $k$ , aangezien de bestemming van transportverzoek  $k$  gelijk is aan het startpunt van transportverzoek  $j$ . Dit is echter niet meer het geval wanneer  $i$  en  $j$  reeds gecombineerd zouden zijn. In dit geval wordt de besparing berekend die optreedt na het combineren van een route (van A naar D) met transportverzoek  $k$ . In deze situatie komt de besparing neer op:

$$S(j, k) = \text{kost}(D, A) + \text{kost}(C, A) - \alpha \cdot \text{kost}(D, A) - \text{kost}(C, A)$$

De mogelijke situaties voor de combinatie van transportverzoeken  $j$  en  $k$  worden weergegeven in figuur 5. Figuur 5(a) toont de beginsituatie, waarbij de drie

transportverzoeken elk in een aparte route zitten. Figuur 5(b) geeft de situatie weer waarbij  $j$  en  $k$  in één route gecombineerd worden. Figuur 5(c) geeft tenslotte de situatie weer waarbij transportverzoek  $k$  toegevoegd wordt aan een bestaande route die eerst transportverzoek  $i$  en dan transportverzoek  $j$  uitvoert.



Figuur 5: De combinatie van transportverzoeken  $j$  en  $k$  (Gronalt et al., 2003: p. 527)

Na elke iteratie geldt dus in het algemeen dat de besparingen, die verbonden zijn met het eerste en het laatste transportverzoek in de nieuw opgestelde route, geactualiseerd dienen te worden.

Om te kunnen bepalen in welke volgorde de combinaties van transportverzoeken doorgevoerd zullen worden, is een beslissingsregel nodig. Als de notatie “ $kies(j, k) = \text{waar}$ ” de situatie voorstelt waarbij de transportverzoeken  $j$  en  $k$  gekozen zijn om in de huidige iteratie gecombineerd te worden, kan de beslissingsregel als volgt weergegeven worden ( $A$  = de verzameling van de transportverzoeken):

$$kies(j, k) = \begin{cases} \text{waar} & \text{als } S(j, k) = \max_{i, h \in A} S(i, h) \\ \text{niet waar} & \text{anders} \end{cases}$$

Het gebruik van deze beslissingsregel vormt het eerste aangepaste spaaralgoritme voor het oplossen van het PDPTW met volledige vrachtwagenladingen. Alhoewel in Gronalt et al. (2003) bij de uitleg van de algoritmen niets wordt vermeld over de tijdsvensters, dienen deze natuurlijk wel strikt gerespecteerd te worden, zoals in de onderliggende veronderstellingen van het model vermeld wordt. Dat dit in Gronalt et al. (2003) ook

gebeurt, blijkt uit de illustratie die zij voor geven om het gebruik van de algoritmen toe te lichten (Gronalt et al., 2003: p. 529 e.v.).

Het tweede algoritme dat door Gronalt et al. (2003) voorgesteld wordt, is een opportuniteits-spaaralgoritme (OSA). De introductie van opportuniteitskosten in de berekening van de besparingen vormt het idee achter dit algoritme. Het OSA bepaalt na de berekeningen van de besparingen (zonder opportuniteitskosten) de beste en de tweede beste combinatie voor elk transportverzoek. Het verschil tussen de besparingen die geassocieerd zijn met deze twee combinaties, kan geïnterpreteerd worden als de opportuniteitskost, die opgelopen wordt wanneer de beste optie niet gekozen zou worden. Wanneer een bepaalde fractie van deze opportuniteitskosten toegevoegd wordt aan de besparingswaarde van de beste combinatie, wordt een nieuwe grootte, namelijk  $\bar{S}$ , berekend. Alvorens de definitie van deze grootte te geven, worden twee notaties ingevoerd, namelijk "best ( $j$ ) = +  $k$ " en "best ( $j$ ) = -  $k$ ". De notatie "best ( $j$ ) = +  $k$ " duidt aan dat het uitvoeren van transportverzoek  $k$  onmiddellijk na  $j$  de beste keuze vormt. De notatie "best ( $j$ ) = -  $k$ " duidt dan aan dat de uitvoering van transportverzoek  $k$  onmiddellijk vóór  $j$  de beste keuze vormt. Wanneer geen voorkeur bestaat, wordt willekeurig beslist welk transportverzoek eerst uitgevoerd wordt. De nieuwe grootte wordt dan als volgt gedefinieerd:

$$\bar{S}(j) = \begin{cases} S(j, |\text{best}(j)|) + \beta \cdot \text{oppcost}(j) & \text{als best}(j) > 0 \\ S(|\text{best}(j)|, j) + \beta \cdot \text{oppcost}(j) & \text{anders} \end{cases}$$

De notatie  $|\text{best}(j)|$  staat hierbij voor het transportverzoek dat bij koppeling met  $j$  de grootste besparing  $S$  oplevert van alle mogelijke combinaties met transportverzoek  $j$ . De parameter  $\beta$ , waarbij geldt dat  $0 \leq \beta \leq 1$ , stelt het gewicht voor dat aan de opportuniteitskosten wordt gekoppeld, met andere woorden de belangrijkheid van deze term ten opzichte van  $S$ , terwijl  $\text{oppcost}(j)$  de opportuniteitskost van transportverzoek  $j$  weergeeft.

De eerste term van deze nieuwe grootheid, namelijk  $S(j, |\text{best}(j)|)$  of  $S(|\text{best}(j)|, j)$ , geeft de besparingswaarde weer wanneer de transportverzoeken  $j$  en  $|\text{best}(j)|$  gecombineerd zouden worden in één route. De tweede term evalueert de tweede beste keuze voor een combinatie met  $j$  doordat het besparingsverlies, dat zou worden opgelopen bij de keuze voor de tweede beste combinatie, in rekening gebracht wordt. Hoe groter de opportuniteitskost, hoe belangrijker het wordt dat gekozen wordt voor de beste combinatie met transportverzoek  $j$  en niet voor de tweede beste. Wanneer geen rekening gehouden wordt met opportuniteitskosten, wordt bij elke iteratie de beste combinatie van transportverzoeken geselecteerd zonder dat naar de impact van deze keuze op de toekomstige keuzemogelijkheden wordt gekeken. Misschien kunnen door de keuze van een combinatie met een lagere besparing in de eerste iteratie, andere besparingen mogelijk worden in latere iteraties die leiden tot een grotere totale besparing. Dit vormt het idee achter het gebruik van de opportuniteitskosten in het selectiecriteria voor het OSA, dat als volgt gedefinieerd wordt:

$$\text{kies}(j, k) = \begin{cases} \text{waar} & \text{als } \bar{S}(j) = \max_{h \in A} \bar{S}(h) \text{ en } \text{best}(j) = +k \\ & \text{of als } \bar{S}(k) = \max_{h \in A} \bar{S}(h) \text{ en } \text{best}(k) = -j \\ \text{niet waar} & \text{anders} \end{cases}$$

Gronalt et al. (2003) bespreken in hun artikel vervolgens een gelijktijdig spaaralgoritme ('*simultaneous-savings algorithm*' of SSA). De bespreking van dit algoritme en de combinatie van dit algoritme met het OSA, kan teruggevonden worden in het artikel van Gronalt et al. (2003) vanaf pagina 528.

### 3.5.3.3 Een invoegheuristiek voor het PDPTW (Lu en Dessouky, 2006)

Invoegheuristicen ('*insertion heuristics*') vormen een klasse van sequentiële routeconstructieheuristicen. Een invoegheuristiek stelt een toelaatbare rittenplan op door middel van het iteratief invoegen van de nog niet toegewezen klantenlocaties in bestaande vrachtwagenroutes. Wanneer een nog niet toegewezen klantenlocatie in geen enkele bestaande vrachtwagenroute ingevoegd kan worden, wordt een nieuwe

vrachtwagenroute gecreëerd. Elke invoegheuristiek dient twee beslissingen te maken: de selectie van de volgende toe te wijzen klantenlocatie en de selectie van de plaats waar deze klantenlocatie in de route ingevoegd zal worden. De meeste invoegheuristieken gebruiken een functie, gewoonlijk gebaseerd op de stijging van de afstands- of kostenfunctie, als selectie criterium. (Lu en Dessouky, 2006; Solomon, 1987)

Lu en Dessouky (2006) bespreken in hun artikel een PDPTW met  $n$  klanten, die elk een ophalingspunt ( $v_i$ ) en een leveringspunt ( $v_{i+n}$ ) specificeren (met  $i = 1, 2, \dots, n$ ). De gekoppelde ophalingspunten en leveringspunten dienen door dezelfde vrachtwagen bediend te worden (*'pairing constraints'*) en de ophaling dient steeds vóór de overeenstemmende levering te gebeuren (*'prior constraints'* of precedentierelaties). De vloot bestaat uit  $m$  identieke vrachtwagens. De capaciteit van de vrachtwagens,  $Q$ , mag op geen enkel punt in de route overschreden worden (capaciteitsbeperking). Voor elk ophalings- of leveringspunt wordt een tijdsvenster ( $E_i, L_i$ ) gedefinieerd ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ), waarbij  $E_i$  het tijdstip weergeeft waarop de service ten vroegst mag beginnen en  $L_i$  het tijdstip waarop de service ten laatste mag beginnen. Alle vrachtwagens vertrekken vanuit een centraal depot  $v_0$  en keren binnen een bepaald tijdsinterval terug naar depot  $v_{2n+1}$ , dat fysisch gelijk mag zijn aan depot  $v_0$ . Het tijdsvenster, waarbinnen het vertrek van de vrachtwagen vanuit depot  $v_0$  moet vallen, wordt gegeven door  $[E_0, L_0]$ , terwijl het tijdsvenster, waarbinnen de aankomst van de vrachtwagens in depot  $v_{2n+1}$  moet vallen, weergegeven wordt door  $[E_{2n+1}, L_{2n+1}]$  (met  $E_{2n+1} = L_{2n+1} = L_0$ ). De maximale routeduur is dus gelijk aan  $(L_0 - E_0)$ . Minimalisatie van de totale kosten, inclusief de vaste vrachtwagenkost en de reiskosten (evenredig aan de afstand), vormt de doelstelling van het probleem.

Voordat overgegaan kan worden tot de bespreking van de invoegheuristiek, moeten nog enkele variabelen en parameters geïntroduceerd worden. De reistijd tussen elk paar locaties  $v_i$  en  $v_j$  wordt gegeven door  $t_{i,j}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 2n, 2n+1$ ).  $A_i$  geeft de vroegste

aankomsttijd van een vrachtwagen op locatie  $i$ , terwijl  $D_i$  de vroegste vertrektijd van een vrachtwagen op locatie  $v_i$  weergeeft en  $D_i = \max(E_i, A_i) + d_i$  (met  $d_i =$  servicetijd op locatie  $v_i$ ). De variabelen  $A_i$  en  $D_i$  zijn geen constanten, maar zijn afhankelijk van de in opbouw zijnde oplossing. Wanneer  $A_i$  groter is dan  $L_i$  op een locatie  $v_j$ , wordt de tijdsvensterbeperking voor die locatie overtreden. Twee parameters worden berekend voor elke aan een vrachtwagen toegewezen locatie, namelijk de wachttijd  $W_i$  en het maximale uitgestelde tijdsinterval  $Y_i$ , waarbij  $W_i + Y_i$  de maximale extra tijd weergeeft die opgelopen kan worden doordat andere locaties op een toelaatbare manier vóór  $v_i$  in de huidige route worden ingevoegd. De wachttijd  $W_i$  wordt als volgt gedefinieerd:  $W_i = \max(0, E_i - A_i)$ . In de veronderstelling dat alle  $k$  locaties in een route  $R$  op volgorde weergegeven  $v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{rk}$  zijn, wordt  $Y_{rj}$  op elke locatie  $v_{rj}$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) als volgt berekend:

$$Y_{rj} = \begin{cases} L_{rk} - \max(A_{rk}, E_{rk}) & \text{als } j = k \\ \min\{L_{rj} - \max(A_{rj}, E_{rj}), Y_{rj+1} + W_{rj+1}\} & \text{als } j = k-1, k-2, \dots, 1 \end{cases}$$

Het opstellen van de initiële route gebeurt volgens de procedure op pagina 676 en 677 van Lu en Dessouky (2006). De volgende stap is het berekenen van de invoegkosten. De grootte van de invoegkost zou zowel de stijging van de afgelegde afstand als de vermindering van de speling op de tijdsvensters moeten weergeven.

Veronderstel dat route  $R$   $k$  locaties bevat:  $v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{rk}$ . Veronderstel bovendien dat het toelaatbaar is om locatie  $v_{rj}$  tussen locaties  $v_{ri-1}$  en  $v_{ri}$  in route  $R$  in te voegen. Laat  $A'_{rj}$  de vroegste aankomsttijd van de vrachtwagen op locatie  $v_{rj}$ , na de invoeging van deze locatie  $v_{rj}$  in route  $R$ , voorstellen. Dan geldt:  $A'_{rj} = \max(A_{ri-1}, E_{ri-1}) + d_{i-1} + t_{i-1,j}$ . Definieer vervolgens  $W'_{rj}$  en  $Y'_{rj}$  als volgt:

$$W'_{rj} = \max(0, E_{rj} - A'_{rj})$$

$$Y'_{rj} = \min \{ L_{rj} - \max ( A'_{rj}, E_{rj} ), W_{ri} + Y_{ri} - \Delta \}$$

$$\text{waarbij } \Delta = t_{i-1,j} + t_{j,i} - t_{i-1,i} + d_j + W'_{rj}$$

De kost van de invoeging van locatie  $v_{rj}$  tussen locaties  $v_{ri-1}$  en  $v_{ri}$  in route  $R$ , wordt weergegeven door de letter  $C$ . Deze invoegkost  $C$  bestaat uit de som van drie termen:  $C = c_1 + c_2 + c_3$ . De term  $c_1$  staat voor de vermindering van de speling op de tijdsvensters van de locaties  $v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{ri-1}$ , na de invoeging van locatie  $v_{rj}$  achter locatie  $v_{ri-1}$  in route  $R$ . De berekening van deze term gebeurt volgens het volgende algoritme:

- Stap 0: Laat  $\beta = W'_{rj} + Y'_{rj}$ ,  $c_1 = 0$  en  $k = i-1$
- Stap 1: Als  $\beta \geq Y_{rk}$  OF  $k = 1$ , dan  $c_1 =$  huidige waarde én STOP
- Stap 2: Als  $k = i-1$ , laat  $c_1 = Y_{rk} - \beta$  en ga naar stap 4; ga anders naar stap 3
- Stap 3: Als  $W_{rk+1} > 0$ , laat  $c_1 = c_1 + \min ( Y_{rk} - \beta, W_{rk+1} )$
- Stap 4: Laat  $\beta = W_{rk} + \beta$  en  $k = k-1$ . Ga naar stap 1

De term  $c_2$  meet de vermindering van de speling op het tijdsvenster van locatie  $v_{rj}$  na de invoeging van deze locatie  $v_{rj}$  tussen locaties  $v_{ri-1}$  en  $v_{ri}$  in route  $R$ . De term  $c_2$  wordt als volgt gedefinieerd:  $c_2 = L_{rj} - \max ( A'_{rj}, E_{rj} ) - Y'_{rj}$ .

De term  $c_3$  geeft de stijging van de afstand weer. Formeel wordt  $c_3$  als volgt gedefinieerd:  $c_3 = t_{i-1,j} + t_{j,i} - t_{i-1,i}$ . Wanneer de snelheid constant blijft, is de reisafstand evenredig met de reistijd. Daardoor kunnen alle drie de termen, namelijk  $c_1$ ,  $c_2$  en  $c_3$ , in tijdseenheden weergegeven worden.

Lu en Dessouky (2006) stellen vervolgens het gebruik van een criterium voor om de kwaliteit van de oplossing te verbeteren. Deze auteurs noemen dit criterium het 'crossing length percentage' of CLP (Lu en Dessouky, 2006: p. 679 e.v.). De waarde van dit criterium

moet bij elke invoeging onder een bepaalde drempelwaarde blijven. Als deze voorwaarde voldaan is, wordt naar de invoegkost gekeken om te beslissen welke locatie als volgende aan welke route wordt toegevoegd en op welke plaats in deze route. De volledige procedure van de heuristiek kan teruggevonden worden in Lu en Dessouky (2006: p. 681 e.v.).

### ***3.6 Het uitwerken van een voorbeeldprobleem***

Na de theoretische besprekingen in dit hoofdstuk en het vorige, wordt in het volgende hoofdstuk dieper ingegaan op een voorbeeldprobleem, namelijk een rondritplanningsprobleem met ophaling en levering en eenheidsladingen, en de heuristische oplossingsprocedure voor dit probleem. In het laatste hoofdstuk van deze eindverhandeling wordt dit rondritplanningsprobleem met ophaling en levering en eenheidsladingen verder uitgebreid met de aanwezigheid van tijdsvensters. In de bespreking van het probleem met tijdsvensters komen de concepten uit het laatste deel van dit hoofdstuk terug.



## **Hoofdstuk 4: Rondritplanning met ophaling en levering en eenheidsladingen**

### **4.1 Inleiding**

Imai, Nishimura en Current (2007) beschrijven in hun paper een '*vehicle routing problem with full container load*' (VRPFC) en zij geven dit probleem de volgende definitie: "Assuming the homogeneous container type and size and own and chartered fleets with different hauling costs and working time lengths, find the optimal assignment of the own and chartered fleets to a set of delivery and pickup point pairs (hereafter referred to as *D-P pairs*), in order to minimize the total distribution cost" (Imai et al., 2007: p. 88).

Het gaat hier om het vervoer van containers tussen enerzijds sites van verladers ('*shippers*') of ontvangers ('*consignees*') en anderzijds intermodale terminals. Bij een leveringsrit ('*delivery trip*') vertrekt de vrachtwagen met een volle container vanuit de terminal en levert deze af bij een ontvanger, waarna de lege vrachtwagen terugkeert naar de terminal. Daartegenover vertrekt bij een ophalingsrit ('*pickup trip*') een vrachtwagen met een lege container naar de site van een verlader, waar de container wordt volgeladen, en keert de vrachtwagen met een volle container terug naar de terminal. In dit hoofdstuk wordt aan de hand van enkele eenvoudige voorbeelden de door Imai et al. (2007) ontworpen heuristiek getest.

### **4.2 Definitie van het probleem**

#### **4.2.1 De vloot**

Een bedrijf heeft gewoonlijk de keuze om vrachtwagens te kopen en hun vervoer zelf uit te voeren of om transporttaken uit te besteden aan een meer gespecialiseerde bedrijf.

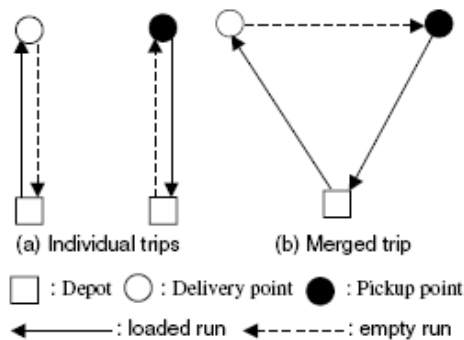
Wanneer transporttaken uitbesteed worden, wordt gebruik gemaakt van een vrachtwagen en chauffeur van een andere firma. In het vervolg van deze thesis zal deze optie aangeduid worden als zijnde het gebruik van een externe vrachtwagen of van een externe vloot.

Imai et al. (2007) veronderstellen een bedrijf dat kiest voor een eigen vloot die qua capaciteit het midden houdt tussen de pieken en de dalen in de vraag, waarbij het overschot van de vraag opgevangen wordt met externe vrachtwagens. Voor de eigen vloot worden de kapitaalkosten en de loonkosten van de bestuurder door Imai et al. (2007) als gezonken kosten (*'sunk costs'*) beschouwd. Gezonken kosten worden in Horngren et al. (2000) gedefinieerd als historische kosten die onvermijdelijk zijn ongeacht welke actie in de toekomst wordt ondernomen. Aangezien de kapitaalkosten en de loonkosten voor de bestuurder bij de eigen vloot altijd worden opgelopen, ongeacht de werklading van de vrachtwagen, vormen deze kosten inderdaad gezonken kosten. De kosten voor brandstof worden echter per rit opgelopen. Deze kosten vormen daardoor het voornaamste deel van de kosten voor de eigen vloot. De kosten voor de externe vloot worden verondersteld groter te zijn dan die voor de eigen vloot. Ook wordt verondersteld dat een externe vrachtwagen direct nadat deze de aan hem toegewezen transporttaken heeft uitgevoerd, terugkeert naar zijn moederbedrijf. Hierdoor variëren de kosten voor een externe vrachtwagen met de tijdsspanne waarbinnen deze door het eigen bedrijf gebruikt wordt. (Horngren et al., 2000; Imai et al., 2007)

Aangezien de eigen vloot goedkoper is dan de externe vloot, is het de bedoeling dat zoveel mogelijk transporttaken toegewezen worden aan de eigen vloot. Een laatste veronderstelling stelt voorop dat de te vervoeren containers van hetzelfde type en dezelfde grootte zijn, zodat de transportkosten niet variëren met de containergrootte. (Imai et al., 2007)

#### 4.2.2 Probleemformulering

Zoals in de inleiding vermeld werd, bestaan binnen het VRPFC uit Imai et al. (2007) twee types van ritten: leveringsritten en ophalingsritten. Een leveringsrit kan echter ook gecombineerd worden met een ophalingsrit (zie figuur 6). De vrachtwagen rijdt met een volle container van de terminal naar de site van de ontvanger. Daarna rijdt hij met een lege container naar de site van de verlader waar hij de container vult en vervolgens rijdt hij met een volle container terug naar de terminal. Zo wordt de afstand die de vrachtwagen aflegt zonder lading verkleind.



Figuur 6: Combinatie leveringsrit en ophalingsrit (Imai et al., 2007: p. 89)

De doelstelling van het probleem bestaat uit het minimaliseren van de totale distributiekosten, terwijl de tijds capaciteit van de vrachtwagens gerespecteerd wordt. De tijds capaciteit van een vrachtwagen bestaat uit de tijdsintervallen waarin het voertuig beschikbaar is voor het uitvoeren van ritten. Het onderhoud van de vrachtwagen (bvb. nakijken van de motor, olie verversen, etc.) neemt ook tijd in beslag en gedurende deze tijd kunnen de vrachtwagens geen ritten uitvoeren. Eigen vrachtwagens worden verondersteld een kleinere tijds capaciteit te bezitten dan externe vrachtwagens. (Imai et al., 2007)

Alle verladers en ontvangers moeten in dit VRPFC bezocht worden. Dit vormt geen probleem aangezien wordt verondersteld dat zoveel externe vrachtwagens als nodig gebruikt kunnen worden. Als laatste wordt verondersteld dat het aantal leveringspunten

gelijk is aan het aantal ophalingspunten, zodat enkel gecombineerde ritten uitgevoerd dienen te worden en geen individuele. Indien het aantal leveringspunten bij een praktische toepassing verschilt van het aantal ophalingspunten, kan deze situatie opgelost worden door gebruik te maken van 'dummy points', waarbij de vervoertijden en transportkosten verbonden aan de ritten van en naar deze leverings- of ophalingspunten gelijk gesteld worden aan nul. Hierdoor kan toch gebruik gemaakt worden van de heuristiek van Imai et al. (2007).

#### 4.2.3 Wiskundige formulering van het optimalisatieprobleem

Het probleem dat in punt 4.2 besproken werd, wordt door Imai et al. (2007) probleem [P] genoemd en wordt wiskundig als volgt geformuleerd:

$$[P] \quad \text{Minimaliseer} \quad \sum_{i \in V^D} \sum_{j \in V^P} \sum_{k \in K} CR_{ijk} \cdot x_{ijk} \quad (1)$$

Onderworpen aan de beperkingen

$$\sum_{i \in V^D} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in V^P \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V^P} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in V^D \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V^D} \sum_{j \in V^P} T_{ij} \cdot x_{ijk} \leq L_k \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V^D, \forall j \in V^P, \forall k \in K \quad (5)$$

Waarbij:

$V^D$  : Set van leveringspunten

$i \in V^D$  : Index voor 1 bepaald leveringspunt

$V^P$  : Set van ophaalpunten

$j \in V^P$  : Index voor 1 bepaald ophaalpunt

$K$  : Set van vrachtwagens

$k \in K$  : Index voor 1 bepaalde vrachtwagen

- $CR_{ijk}$  : Transportkost opgelopen door  $k$  van het depot naar  $i$ , naar  $j$  en terug naar het depot
- $x_{ijk}$  :  $\begin{cases} = 1 & \text{indien een container van } i \text{ naar } j \text{ vervoerd wordt door } k \\ = 0 & \text{anders} \end{cases}$
- $T_{ij}$  : De vervoertijd ('*hauling time*') van het depot naar  $i$ , naar  $j$  en terug naar het depot
- $L_k$  : De tijds capaciteit van  $k$

De doelfunctie van probleem [P] bestaat dus uit het minimaliseren van de transportkosten die opgelopen worden door het uitvoeren van gecombineerde leverings- en ophalingsritten. De set van beperkingen (2) zorgt ervoor dat elk ophalingspunt verbonden is met exact één leveringspunt en exact door één vrachtwagen wordt bezocht. De set van beperkingen (3) zorgt ervoor dat elk leveringspunt met exact één ophalingspunt verbonden is en exact door één vrachtwagen bezocht wordt. Beide sets van beperkingen samen zorgen dat een gecombineerde rit slechts uit één leverings- en één ophalingspunt bestaat en dat deze gecombineerde rit slechts door één vrachtwagen wordt uitgevoerd. Elk voertuig kan enkel ritten uitvoeren zolang zijn tijds capaciteit niet overschreden wordt. Om dit te bereiken wordt de set van beperkingen (4) toegevoegd. (Imai et al., 2007)

#### 4.2.4 Toepassing van de techniek van Lagrange relaxatie

##### 4.2.4.1 Inleiding

Imai et al. (2007) tonen in hun paper aan dat het '*vehicle routing problem with full container load*' NP-hard is. Veel NP-harde problemen kunnen optimaal opgelost worden, maar dit neemt, zeker voor praktische problemen, veel tijd in beslag. Om als bedrijf de klanten echter goed te kunnen bedienen, moet een rittenplan snel berekend kunnen worden. Dit vormt de reden dat Imai et al. (2007) een heuristisch voorstellen om het VRPFC op te lossen. De auteurs maken in deze heuristiek gebruik van een Lagrange relaxatie van het originele probleem [P]. Om de heuristiek uit Imai et al. (2007) beter te begrijpen, wordt daarom eerst een algemene uitleg over Lagrange relaxatie gegeven. Deze

uitleg wordt gebaseerd op het artikel van Fisher (1981), dat een overzicht geeft van wat in het voorgaande decennium geleerd werd over Lagrange relaxatie.

#### 4.2.4.2 Lagrange relaxatie voor geheeltallige lineaire programmeringsproblemen

Fisher (1981) vertrekt vanuit een combinatorisch optimalisatieprobleem (P), geformuleerd als een geheeltallig programmeringsprobleem ('*integer programming problem*' of IP). De wiskundige formulering van dit probleem is de volgende:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \text{Minimaliseer } c \cdot x \\ & \text{Onderworpen aan de beperkingen} \\ & A \cdot x = b \\ & D \cdot x \leq e \\ & x \geq 0 \text{ en geheeltallig} \end{aligned}$$

$x$  stelt hierbij een  $n \times 1$  matrix voor,  $b$  een  $m \times 1$  matrix,  $e$  een  $k \times 1$  matrix en alle andere matrices hebben dimensies die hier in overeenstemming mee zijn.

De relaxatie van probleem (P) kan volgens Fisher (1981) op drie mogelijke manieren gebeuren. Bij een eerste optie wordt de beperking van de elementen van  $x$  tot gehele getallen weggelaten, zodat reële getallen ook toegelaten zijn en de simplex methode gebruikt kan worden om tot een oplossing te komen. Deze relaxatie wordt algemeen de LP relaxatie van het geheeltallig programmeringsprobleem genoemd. Het gerelaxeerd probleem, dat door Fisher (1981) probleem (LP) genoemd wordt, wordt dus een gewoon lineair programmeringsprobleem in plaats van een IP. De optimale doelfunctiewaarde van het probleem (LP) wordt voorgesteld door de notatie  $Z_{LP}$ . Bij de LP relaxatie geldt dat  $Z_{LP}$  kleiner is dan of gelijk aan  $Z$  ( $Z_{LP} \leq Z$ ), waarbij  $Z$  de doelfunctiewaarde van (P) voorstelt. (Fisher, 1981; Hillier en Lieberman, 2001)

Een tweede mogelijke relaxatie gebeurt, volgens Fisher (1981), door het overbrengen van de set van gelijkheidsbeperkingen naar de doelfunctie. Hierdoor ontstaat het Lagrange probleem ( $LR_\lambda$ ), met als doelfunctiewaarde  $Z_0(\lambda)$ .

**(LR<sub>u</sub>)** Minimaliseer  $c \cdot x + \lambda \cdot (A \cdot x - b)$

Onderworpen aan de beperkingen

$$D \cdot x \leq e$$

$$x \geq 0 \text{ en geheeltallig}$$

De vector  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  in deze formulering, is een vector van Lagrange multiplicatoren.

Bij deze tweede relaxatie geldt opnieuw dat de optimale doelfunctiewaarde, hier  $Z_0(\lambda)$ , kleiner is dan of gelijk aan  $Z$  ( $Z_0(\lambda) \leq Z$ ). Deze ongelijkheid kan gemakkelijk aangetoond worden. Stel dat  $x^*$  een optimale oplossing van (P) voorstelt, dan geldt:

$$Z_0(\lambda) \leq c \cdot x^* + \lambda \cdot (A \cdot x^* - b) = Z$$

De ongelijkheid in deze relatie volgt uit de definitie van  $Z_0(\lambda)$ , terwijl de gelijkheid volgt uit het feit dat  $Z = c \cdot x^*$  en dat  $A \cdot x^* - b = 0$ .

De derde en laatste mogelijke relaxatie voor probleem (P) uit Fisher (1981), brengt de set van ongelijkheidsbeperkingen over naar de doelfunctie. Hierdoor ontstaat het Lagrange probleem (LR<sub>λ</sub>') met als doelfunctiewaarde  $Z_0'(\lambda)$ .

**(LR<sub>λ</sub>')** Minimaliseer  $c \cdot x + \lambda \cdot (D \cdot x - e)$

Onderworpen aan de beperkingen

$$A \cdot x = b$$

$$x \geq 0 \text{ en geheeltallig}$$

Ook bij deze relaxatie is de optimale doelfunctiewaarde, hier  $Z_0'(\lambda)$ , kleiner dan of gelijk aan  $Z$  ( $Z_0'(\lambda) \leq Z$ ). Deze ongelijkheid kan opnieuw gemakkelijk aangetoond worden. Stel dat  $x^*$  een optimale oplossing van (P) voorstelt, dan geldt onder de vereiste dat  $\lambda$  een positief getal is:

$$Z_0'(\lambda) \leq c \cdot x^* + \lambda \cdot (D \cdot x^* - e) \leq Z$$

De eerste ongelijkheid in deze relatie volgt uit de definitie van  $Z'_0(\lambda)$ , terwijl de tweede ongelijkheid volgt uit het feit dat  $Z = c \cdot x^*$  en dat  $D \cdot x^* - e \leq 0$ .

De bedoeling bij de laatste twee relaxaties is om  $\lambda$  te optimaliseren zodat de oplossing van de relaxatie een toelaatbare oplossing voor (P) vormt en de optimale doelfunctiewaarde van de relaxatie zo dicht mogelijk bij  $Z$  komt te liggen. Er bestaat immers geen garantie dat een  $\lambda$  gevonden kan worden waarvoor de oplossing van de relaxatie gelijk is aan de optimale oplossing van (P), waardoor een zo dicht mogelijke benadering van deze optimale oplossing gezocht dient te worden.

#### 4.2.4.3 Lagrange relaxatie voor rondritplanning met eenheidsladingen

De door Imai et al. (2007) voorgestelde heuristiek maakt gebruik van een 'subgradient optimization procedure', gebaseerd op de Lagrange relaxatie [PR] van het originele probleem [P].

$$\begin{aligned}
 \text{[PR]} \quad \text{Minimaliseer} \quad & \sum_{i \in V^D} \sum_{j \in V^P} \sum_{k \in K} CR_{ijk} \cdot x_{ijk} + \sum_{k \in K} \lambda_k \cdot \left( \sum_{i \in V^D} \sum_{j \in V^P} T_{ij} \cdot x_{ijk} - L_k \right) \\
 & = \sum_{i \in V^D} \sum_{j \in V^P} \sum_{k \in K} (CR_{ijk} + \lambda_k \cdot T_{ij}) \cdot x_{ijk} - \sum_{k \in K} \lambda_k \cdot L_k \quad (6)
 \end{aligned}$$

Onderworpen aan de beperkingen

$$\sum_{i \in V^D} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in V^P \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V^P} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in V^D \quad (3)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V^D, \forall j \in V^P, \forall k \in K \quad (5)$$

Waarbij  $\lambda_k$  = Lagrange multiplicator voor vrachtwagen  $k$

Om probleem [PR] wat overzichtelijker voor te stellen, wordt  $(CR_{ijk} + \lambda_k \cdot T_{ij})$  vervangen door  $CR'_{ijk}$  en wordt de constante term  $\sum_{k \in K} \lambda_k \cdot L_k$  weggelaten, waardoor probleem [PR] ontstaat:



$$[\text{PR}'] \text{ Minimaliseer } \sum_{i \in V^D} \sum_{j \in V^P} \sum_{k \in K} CR'_{ijk} \cdot x_{ijk} \quad (7)$$

Onderworpen aan de beperkingen (2), (3) and (5)

### 4.3 De oplossingsprocedure: een Lagrange relaxatie-gebaseerde heuristiek

#### 4.3.1 Koppeling van leverings- en ophalingspunten

Probleem [PR'] uit de vorige paragraaf wordt niet langer beperkt door de vrachtwagens uit de vloot. Zolang alle transportverzoeken worden voldaan, kunnen de goedkoopste vrachtwagens gebruikt worden aangezien geen rekening meer gehouden moet worden met de tijds capaciteit van de vrachtwagens. Probleem [PR'] kan dus herschreven worden als probleem [PL].

$$[\text{PL}] \text{ Minimaliseer } \sum_{i \in V^D} \sum_{j \in V^P} \hat{C}_{ij} \cdot y_{ij} \quad (8)$$

Onderworpen aan de beperkingen

$$\sum_{i \in V^D} y_{ij} = 1 \quad \forall j \in V^P \quad (9)$$

$$\sum_{j \in V^P} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in V^D \quad (10)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V^D, \forall j \in V^P \quad (11)$$

$$\text{Waarbij: } \hat{C}_{ij} = \text{Min}_{k \in K} (CR'_{ijk}) \quad \forall i \in V^D, \forall j \in V^P$$

$y_{ij} = 1$  indien een container van  $i$  naar  $j$  vervoerd wordt; 0 anders

De oplossing van dit probleem geeft paren van telkens één leveringspunt gecombineerd met één ophalingspunt. Deze 'delivery-pickup' paren of D-P paren moeten vervolgens nog toegewezen worden aan een vrachtwagen, die dan de gecombineerde rit zal uitvoeren. (Imai et al., 2007)

### 4.3.2 Toewijzing van de gekoppelde leverings- en ophalingspunten aan de vloot

Probleem [PF] gebruikt de oplossing van probleem [PL] als input om een toelaatbare oplossing voor probleem [P] te vinden. Probleem [PF] verbindt namelijk elk D-P paar met een vrachtwagen die deze gecombineerde rit zal uitvoeren, zodat een toelaatbare oplossing voor probleem [P] gevonden wordt. (Imai et al., 2007)

$$\text{[PF]} \quad \text{Minimaliseer} \quad \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} \bar{C}_{kp} \cdot z_{kp} \quad (12)$$

Onderworpen aan de beperkingen

$$\sum_{k \in K} z_{kp} = 1 \quad \forall p \in P \quad (13)$$

$$\sum_{p \in P} T_p \cdot z_{kp} \leq L_k \quad \forall k \in K \quad (14)$$

$$z_{kp} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (15)$$

Waarbij:

$P$  : Set van D-P paren uit de oplossing van [PL]

$p \in P$  : Index voor 1 bepaald D-P paar

$\bar{C}_{kp}$  : Transportkost opgelopen door  $k$  die  $p$  bedient

$T_p$  : De vervoertijd ('hauling time') voor het uitvoeren van  $p$

$z_{kp}$  :  $\begin{cases} = 1 \text{ indien } p \text{ bediend wordt door } k \\ = 0 \text{ anders} \end{cases}$

Aangezien probleem [PF] herleid kan worden tot het 'general assignment problem' voorstelt, kan het niet in polynomiale tijd opgelost worden, waardoor het gebruik van een heuristisch nodig wordt wanneer problemen van praktische grootte opgelost moeten worden. Imai et al. (2007) vormen hiertoe probleem [PF] verder om tot een 'general bin packing problem', afgekort GBPP, en lossen dit GBPP op via een licht aangepaste versie

van de *'first fit decreasing order'* heuristiek. Deze aangepaste heuristiek kan teruggevonden worden in Appendix A van het artikel van Imai et al. (2007: p. 103).

#### 4.3.3 Overzicht van de volledige heuristische oplossingsprocedure

De volledige heuristische oplossingsprocedure wordt door Imai et al. (2007) in de volgende vier stappen samengevat:

- *Stap 1:* Relaxeer de tijds capaciteiten van de vrachtwagens in probleem [P], zodat probleem [PR] opgesteld wordt. Gebruik de vrachtwagen die de laagste kosten met zich mee brengt om de transportkosten  $\hat{C}_{ij}$  voor de doelfunctie van probleem [PL] te bepalen.
- *Stap 2:* Los probleem [PL] op. Hierbij wordt voor elk leveringspunt het ophalingspunt geselecteerd dat aan dit leveringspunt gekoppeld wordt.
- *Stap 3:* Definieer probleem [PF]. Gebruik in dit probleem de reële distributiekost  $\bar{C}_{kp}$ .
- *Stap 4:* Los probleem [PF] op. Deze oplossing geeft aan welke vrachtwagen welk in stap 2 gevormd D-P paar zal bezoeken. Samen met de oplossing van [PL] geeft de oplossing van [PF] dus een toelaatbare oplossing voor probleem [P].

#### 4.3.4 Bepaling van de Lagrange multiplicatoren: de *'subgradient optimization procedure'*

De kwaliteit van de gevonden toelaatbare oplossing hangt natuurlijk in grote mate af van het vinden van goede Lagrange multiplicatoren ( $\lambda_k$ 's). Fisher (1981) stelt dat verschillende methodes bestaan om een goede, eventueel zelfs optimale, set van Lagrange multiplicatoren te vinden. Imai et al. (2007)<sup>1</sup> kiezen voor het gebruik van een

---

<sup>1</sup> In Imai et al. (2007) wordt gebruik gemaakt van de letter  $k$  om de iteratie aan te duiden. Aangezien dit gemakkelijk te verwarren is met de index voor de vrachtwagen werd deze letter in deze thesis echter vervangen door de letter  $n$ . De rest van de formuleringen zijn gelijk aan die van Imai et al. (2007).

'subgradient optimization procedure'. In deze procedure wordt, beginnend met een set multiplicatoren  $\lambda^0$ , per iteratie een reeks nieuwe multiplicatoren gegenereerd volgens de volgende formule:

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + t_n \cdot (Ax^n - b)$$

waarbij:  $x^n$  = de oplossing van het Lagrange probleem [PR ( $\lambda^n$ )]

$t_n$  = een positieve stapgrootte

$(Ax \leq b)$  = de set van beperkingen die gerelaxeerd wordt.

De stapgrootte  $t_n$  wordt als volgt berekend:

$$t_n = d_n \cdot (\bar{Z} - Z_{PL}(\lambda)) / \|Ax^n - b\|^2$$

waarbij:  $\bar{Z}$  = de beste gekende doelfunctiewaarde (van een toelaatbare oplossing)

$\|Ax^n - b\|^2$  = de Euclidische norm van  $(Ax \leq b)$

$d_n$  = een getal groter dan 0 en kleiner dan of gelijk aan 2 ( $0 < d_n \leq 2$ )

Formeel kan de procedure<sup>2</sup> als volgt weergegeven worden:

- *Stap 1:*  $Maxiter = 200$ ,  $d_n = 2$ ,  $\bar{Z} = +\infty$ ,  $Iter = 1$ ,  $n = 1$ ,  $BestLB = 0$ ,  
 $\lambda^1 = \lambda^* = \{0\}$ .
- *Stap 2:* Los probleem [PL] op en bereken de doelfunctiewaarde van [PR]. Laat  $Z_{PR}$  deze doelfunctiewaarde van [PR] zijn. Als  $Z_{PR} > BestLB$ , laat dan  $BestLB = Z_{PR}$ ,  $Iter = 1$ ,  $\lambda^* = \lambda^n$ , anders  $Iter = Iter + 1$ .
- *Stap 3:* Los probleem [PF] op. Laat  $FEAS$  de doelfunctiewaarde van de toelaatbare oplossing zijn. Als  $FEAS < \bar{Z}$ , laat dan  $\bar{Z} = FEAS$ . Als  $\bar{Z} - BestLB < 1$ , STOP.
- *Stap 4:* Als  $Iter = 20$ , dan  $Iter = 1$ ,  $\lambda^{n+1} = \lambda^*$ ,  $d = d/2$ ; bereken anders stapgrootte  $t_n$  en pas de multiplicatoren ( $\lambda^n$ ) aan.
- *Stap 5:* Laat  $n = n + 1$ . Als  $n > Maxiter$ , STOP; anders: ga naar de volgende stap.
- *Stap 6:* Als  $\lambda^n < 0$ , stel dan  $\lambda^n = 0$ . Ga vervolgens terug naar stap 2.

---

<sup>2</sup> Formulering gebaseerd op Imai et al. (2007)

Aangezien geen manier bestaat om te bewijzen wanneer een optimale oplossing gevonden wordt via de procedure, wordt deze procedure afgebroken na een arbitrair gekozen aantal iteraties. In dit geval is deze parameter, die toepasselijk *Maxiter* genoemd wordt, gelijk aan 200 iteraties. De teller  $n$  houdt het totale aantal uitgevoerde iteraties bij. Het getal  $d_n$  wordt telkens gehalveerd nadat twintig iteraties voorbij zijn gegaan waarin de doelfunctiewaarde  $Z_{PR}$  niet vergroot. Deze regel bleek in het verleden in de praktijk goed te werken. Om bij te houden wanneer  $d_n$  gehalveerd moet worden, wordt de kleine teller *Iter* geïntroduceerd. De parameter *BestLB* geeft de waarde van de best gekende benedengrens voor [P] weer en de parameter *FEAS* geeft, zoals in de procedure reeds vermeld werd, de doelfunctiewaarde weer van de toelaatbare oplossing van [PF] in de huidige iteratie. (Fisher, 1981; Imai et al., 2007)

In stap twee van de procedure moet de doelfunctiewaarde van [PR] berekend worden. Deze doelfunctiewaarde kan als volgt afgeleid worden uit de oplossing van [PL]:  $\forall i, j$  laat  $x_{ijk^*} = y_{ij}$ , waarbij  $k^*$  staat voor de vrachtwagen met de laagste Lagrange transportkost ( $CR'_{ijk}$ ), en voor alle andere  $k$  laat  $x_{ijk} = 0$ .

#### ***4.4 Illustratie aan de hand van een voorbeeld met uitsluitend eigen vrachtwagens***

##### **4.4.1 Inleiding**

In dit eerste voorbeeld gaat het om een VRPFC met vijf leverings- en vijf ophalingspunten, zodat vijf D-P paren gevormd zullen worden in de oplossing. De vloot bestaat uit twee eigen vrachtwagens.

#### 4.4.2 De data

De gegevens voor een eerste voorbeeld worden uit Eilon et al. (1971) overgenomen. In Tabel A.9.7 "Details of problem 7" (Eilon et al., 1971: p. 200) worden hier de coördinaten gegeven van een aantal klantenlocaties en van een depot. Uit deze tabel worden de locatiegegevens voor dit eerste voorbeeld dus geselecteerd. In tabel 3, die hieronder volgt, worden deze locatiegegevens weergegeven. Als afstand tot het depot wordt hier de Euclidische afstand gebruikt, nl.  $d_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  = Euclidische afstand tussen punt 1 en punt 2.

Tabel 3: Locatiegegevens (1<sup>ste</sup> voorbeeld VRPFC)

Klant nr.	x-coördinaat	y-coördinaat	Afstand tot depot	Soort punt
0	292	425	/	depot
1	298	427	6	leveringspunt
2	307	464	42	ophalingspunt
3	320	439	31	leveringspunt
4	322	437	32	ophalingspunt
5	314	435	24	leveringspunt
6	324	433	33	ophalingspunt
7	304	427	12	leveringspunt
8	296	418	8	ophalingspunt
9	297	410	16	leveringspunt
10	314	406	29	ophalingspunt

Aangezien in het VRPFC gevraagd wordt om een rittenplanning op te stellen met D-P paren die uitgevoerd worden door vrachtwagens met een beperkte tijds capaciteit, zijn bijkomende gegevens nodig. Ten eerste moet de afstand berekend worden van het depot naar elk leveringspunt, naar elk ophalingspunt en dan terug naar het depot. Op basis van deze afstanden kunnen dan de vervoertijden en de transportkosten voor eigen en geleaste vrachtwagens bepaald worden. De vervoertijd of 'hauling time' nodig om een D-P paar te

bedienen, wordt arbitrair gelijk gesteld aan anderhalf keer de afstand van de gecombineerde rit, waarbij de bekomen rationale getallen afgerond worden tot gehele getallen. De transportkosten van de vloot worden in de probleembeschrijving verondersteld afhankelijk te zijn van de vervoertijden en aangezien de vervoertijden afhankelijk zijn van de afstand, worden de transportkosten voor de eigen vrachtwagens gelijk gesteld aan twee maal de afstand van de gecombineerde rit, waarbij weer een afronding tot gehele getallen gebeurt. De vervoertijden en de transportkosten die gebruikt worden in dit eerste voorbeeld worden in de tabellen 4 en 5 weergegeven.

Tabel 4: Vervoertijden (1<sup>ste</sup> voorbeeld VRPFC)

<i>i j</i>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	129	97	99	35	93
<b>3</b>	152	100	107	107	141
<b>5</b>	144	97	101	85	123
<b>7</b>	137	98	99	48	97
<b>9</b>	169	127	126	48	94

Tabel 5: Transportkosten van een rit met eigen vrachtwagen (1<sup>ste</sup> voorbeeld VRPFC)

<i>i j</i>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	172	129	132	47	124
<b>3</b>	203	133	143	143	188
<b>5</b>	192	129	135	114	164
<b>7</b>	182	130	132	65	129
<b>9</b>	225	170	169	64	125

Een laatste benodigd gegeven is de tijds capaciteit van de eigen vrachtwagens. Aangezien het hier om een klein voorbeeld gaat, kan deze best niet al te groot gekozen worden. Daarom wordt gebruik gemaakt van een tijds capaciteit van 360 minuten.

### 4.4.3 Bepaling van geschikte Lagrange multiplicatoren voor het probleem

Een belangrijke vraag die gesteld kan worden, is of de heuristiek het optimale resultaat voor het voorbeeldprobleem zal geven. Daarom wordt in deze paragraaf de 'subgradient optimization procedure' gevolgd om Lagrange multiplicatoren voor het voorbeeld te bepalen, waarna in punt 4.4.4 de heuristiek uitgevoerd zal worden en in punt 4.4.5 ter vergelijking de optimale oplossing berekend zal worden. De berekening van de optimale oplossing is in dit geval mogelijk, aangezien het om een klein voorbeeld gaat.

Om per iteratie in de 'subgradient optimization procedure' de problemen [PL] en [PF] op te lossen wordt het optimalisatieprogramma LINDO gebruikt (meer informatie kan gevonden worden op de website: [www.lindo.com](http://www.lindo.com)). Aangezien het om een klein voorbeeld gaat, kan probleem [PF] optimaal opgelost worden en hoeft de aangepaste 'first fit decreased order' heuristiek hier niet gebruikt te worden. De problemen worden wiskundig weergegeven zoals ze in LINDO ingevoerd moeten worden. Waar mogelijk wordt echter wel gebruik gemaakt van formules opdat de modellen niet te groot zouden worden. Deze formules dienen natuurlijk wel volledig uitgeschreven te worden wanneer het model in LINDO ingegeven wordt. De notatie INTEGER gevolgd door een variabele betekent dat deze variabele binair is, met andere woorden dat deze variabele alleen de waarden nul en één kan aannemen.

- *Stap 1:*  $Maxiter = 200$ ,  $d_n = 2$ ,  $\bar{Z} = +\infty$ ,  $Iter = 1$ ,  $n = 1$ ,  $BestLB = 0$ ,  $\lambda^1 = \lambda^* = \{0\}$ .
- *Stap 2:* Los probleem [PL] op en bereken de doelfunctiewaarde van [PR]. Laat  $Z_{PR}$  deze doelfunctiewaarde van [PR] zijn. Als  $Z_{PR} > BestLB$ , laat dan  $BestLB = Z_{PR}$ ,  $Iter = 1$ ,  $\lambda^* = \lambda^n$ , anders  $Iter = Iter + 1$ .
  - probleem [PL]  
**MIN**  $172 Y_{12} + 129 Y_{14} + 132 Y_{16} + 47 Y_{18} + 124 Y_{110} + 203 Y_{32} + 133 Y_{34}$   
 $+ 143 Y_{36} + 143 Y_{38} + 188 Y_{310} + 192 Y_{52} + 129 Y_{54} + 135 Y_{56} + 114 Y_{58}$



$$+ 164 Y_{510} + 182 Y_{72} + 130 Y_{74} + 132 Y_{76} + 65 Y_{78} + 129 Y_{710} + 225 Y_{92} \\ + 170 Y_{94} + 169 Y_{96} + 64 Y_{98} + 125 Y_{910}$$

**SUBJECT TO**

$$\sum_i Y_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}; \text{ met } i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}; \text{ met } j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

**END**

INTEGER  $Y_{ij} \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$  en  $\forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$

- gevormde D-P paren als resultaat van [PL]: 1-8 (paar 1), 3-4 (paar 2), 5-6 (paar 3), 7-2 (paar 4) en 9-10 (paar 5)
- $Z_{PR} = 622 > 0 \rightarrow BestLB = 622$
- $Iter = 1, \lambda^* = \{0\}$
- *Stap 3:* Los probleem [PF] op. Laat *FEAS* de doelfunctiewaarde van de toelaatbare oplossing zijn. Als  $FEAS < \bar{Z}$ , laat dan  $\bar{Z} = FEAS$ . Als  $\bar{Z} - BestLB < 1$ , STOP.

- probleem [PF]

**MIN**  $47 Z_{11} + 47 Z_{21} + 133 Z_{12} + 133 Z_{22} + 135 Z_{13} + 135 Z_{23} + 182 Z_{14} + 182 Z_{24} + 125 Z_{15} + 125 Z_{25}$

**SUBJECT TO**

$$\sum_k Z_{kp} = 1 \quad \forall p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}; \text{ met } k \in \{1, 2\}$$

$$35 Z_{11} + 100 Z_{12} + 101 Z_{13} + 137 Z_{14} + 94 Z_{15} < 360$$

$$35 Z_{21} + 100 Z_{22} + 101 Z_{23} + 137 Z_{24} + 94 Z_{25} < 360$$

**END**

INTEGER  $Z_{kp} \quad \forall k \in \{1, 2\}$  en  $\forall p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- vrachtwagen 1: D-P paar 4 (7-2)  
vrachtwagen 2: D-P paren 1 (1-8), 2 (3-4), 3 (5-6) en 5 (9-10)
- $FEAS = 622 < +\infty \rightarrow \bar{Z} = 622$
- $\bar{Z} - BestLB = 622 - 622 = 0 < 1 \rightarrow \text{STOP}$

- Stap 4, 5 en 6 niet meer nodig.

Hieruit blijkt dat de optimale Lagrange multiplicatoren beide gelijk zijn aan nul. Indien de set van tijds capaciteitsbeperkingen dus weggelaten wordt bij de formulering van het voorbeeld, vindt LINDO hetzelfde resultaat voor dit probleem [P'] dan voor het originele probleem [P]. Deze set beperkingen houdt in dit voorbeeld dus een voorwaarde in die automatisch vervuld wordt door de oplossing.

#### 4.4.4 Oplossing van het probleem via de heuristiek

Om een antwoord te vinden op de vraag of de heuristiek ook de optimale oplossing voor [P] kan vinden, wordt de heuristiek uitgevoerd met beide Lagrange multiplicatoren gelijk aan nul. Achtereenvolgens worden probleem [PL] en probleem [PF] opgelost. Deze oplossingen kunnen in de vorige paragraaf teruggevonden worden, aangezien daar probleem [PL] en [PF] met  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  reeds opgelost werden bij de uitvoering van de 'subgradient optimization procedure'. De volgende resultaten werden daar gevonden:

- doelfunctiewaarde [PL] = doelfunctiewaarde [PF] = 622
- vrachtwagen 1 bezoekt D-P paar 7-2
- vrachtwagen 2 bezoekt D-P paren 1-8, 3-4, 5-6 en 9-10

#### 4.4.5 De exacte oplossing van het probleem

Aangezien het hier om een klein voorbeeld gaat, is het mogelijk dit exact op te lossen met behulp van LINDO. De wiskundige formulering van het probleem, waarbij de delen waar dit kan ingekort werden tot formules, is de volgende:

$$\begin{aligned} \text{MIN } & 172 X_{121} + 172 X_{122} + 129 X_{141} + 129 X_{142} + 132 X_{161} + 132 X_{162} + 47 X_{181} + 47 \\ & X_{182} + 124 X_{1101} + 124 X_{1102} + 203 X_{321} + 203 X_{322} + 133 X_{341} + 133 X_{342} + 143 X_{361} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 143 X_{362} + 143 X_{381} + 143 X_{382} + 188 X_{3101} + 188 X_{3102} + 192 X_{521} + 192 X_{522} + \\ &129 X_{541} + 129 X_{542} + 135 X_{561} + 135 X_{562} + 114 X_{581} + 114 X_{582} + 164 X_{5101} + 164 \\ &X_{5102} + 182 X_{721} + 182 X_{722} + 130 X_{741} + 130 X_{742} + 132 X_{761} + 132 X_{762} + 65 X_{781} + \\ &65 X_{782} + 129 X_{7101} + 129 X_{7102} + 225 X_{921} + 225 X_{922} + 170 X_{941} + 170 X_{942} + 169 \\ &X_{961} + 169 X_{962} + 64 X_{981} + 64 X_{982} + 125 X_{9101} + 125 X_{9102} \end{aligned}$$

### **SUBJECT TO**

$$\sum_i \sum_k X_{ijk} = 1 \quad \forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}; \text{ met } i \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ en } k \in \{1, 2\}$$

$$\sum_j \sum_k X_{ijk} = 1 \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}; \text{ met } j \in \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ en } k \in \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned} &129 X_{121} + 97 X_{141} + 99 X_{161} + 35 X_{181} + 93 X_{1101} + 152 X_{321} + 100 X_{341} + 107 X_{361} + \\ &107 X_{381} + 141 X_{3101} + 144 X_{521} + 97 X_{541} + 101 X_{561} + 85 X_{581} + 123 X_{5101} + 137 \\ &X_{721} + 98 X_{741} + 99 X_{761} + 48 X_{781} + 97 X_{7101} + 169 X_{921} + 127 X_{941} + 126 X_{961} + 48 \\ &X_{981} + 94 X_{9101} < 360 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &129 X_{122} + 97 X_{142} + 99 X_{162} + 35 X_{182} + 93 X_{1102} + 152 X_{322} + 100 X_{342} + 107 X_{362} \\ &+ 107 X_{382} + 141 X_{3102} + 144 X_{522} + 97 X_{542} + 101 X_{562} + 85 X_{582} + 123 X_{5102} + 137 \\ &X_{722} + 98 X_{742} + 99 X_{762} + 48 X_{782} + 97 X_{7102} + 169 X_{922} + 127 X_{942} + 126 X_{962} + 48 \\ &X_{982} + 94 X_{9102} < 360 \end{aligned}$$

$$X_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}, \forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ en } \forall k \in \{1, 2\}$$

De volgende oplossing voor dit probleem werd door LINDO gegenereerd:

- doelfunctiewaarde = 622
- $X_{181}, X_{721} = 1$  worden in de eerste eigen vrachtwagen uitgevoerd
- $X_{342}, X_{562}, X_{9102} = 1$  worden in de tweede eigen vrachtwagen uitgevoerd
- de niet genoemde variabelen zijn alle gelijk aan 0

Wanneer de locaties opgesomd worden in de volgorde die door de vrachtwagens gevolgd worden, wordt het volgende resultaat verkregen:

- voor de eerste vrachtwagen: depot – leveringspunt 1 – ophalingspunt 8 – depot – leveringspunt 7 – ophalingspunt 2 – depot
- voor de tweede vrachtwagen: depot – leveringspunt 3 – ophalingspunt 4 – depot – leveringspunt 5 – ophalingspunt 6 – depot – leveringspunt 9 – ophalingspunt 10 – depot

De eerste eigen vrachtwagen bezoekt twee D-P paren, terwijl de tweede eigen vrachtwagen de overige drie D-P paren voor zijn rekening neemt.

Wanneer de exacte oplossing vergeleken wordt met de oplossing die door de heuristiek wordt gevonden, blijkt dat wel dezelfde *'delivery-pickup'* paren gevormd worden, maar dat de toewijzingen aan de twee eigen vrachtwagens verschillen. Aangezien dit verschil in allocatie geen invloed heeft op de doelfunctiewaarde, zijn beide oplossingen volledig gelijkwaardig.

#### ***4.5 Illustratie aan de hand van een voorbeeld met eigen en externe vrachtwagens***

##### **4.5.1 Inleiding**

In dit tweede voorbeeld wordt weer een VRPFC met vijf leverings- en vijf ophalingspunten bekeken. Er zullen opnieuw vijf gecombineerde ritten gevormd worden in de oplossing. De vloot bestaat nu echter uit één eigen en één duurdere externe vrachtwagen.

##### **4.5.2 De data**

De basisgegevens zijn dezelfde als in het eerste voorbeeld en komen dus uit Eilon et al. (1971). De locatiegegevens van de leverings- en ophalingspunten worden hier niet meer herhaald aangezien deze cijfers slechts een basis vormen voor de gegevens die in het

probleem nodig zijn. De vervoertijd of *'hauling time'* nodig om een D-P paar te bedienen, wordt nog altijd arbitrair gelijk gesteld aan anderhalf keer de afstand van de gecombineerde rit, waarbij de bekomen rationale getallen afgerond worden tot gehele getallen. De transportkosten van de vloot worden in de probleembeschrijving verondersteld afhankelijk te zijn van de vervoertijden en aangezien de vervoertijden afhankelijk zijn van de afstand, worden de transportkosten voor de eigen vrachtwagen gelijk gesteld aan twee maal de afstand van de gecombineerde rit en die voor de externe vrachtwagen worden gelijk gesteld aan drie maal de afstand van de gecombineerde rit, waarbij beide kosten weer afgerond worden tot gehele getallen. De vervoertijden en de transportkosten die gebruikt worden in dit tweede voorbeeld worden in tabellen 6, 7 en 8 weergegeven.

Tabel 6: Vervoertijden (2<sup>de</sup> voorbeeld VRPFC)

<i>i j</i>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	129	97	99	35	93
<b>3</b>	152	100	107	107	141
<b>5</b>	144	97	101	85	123
<b>7</b>	137	98	99	48	97
<b>9</b>	169	127	126	48	94

Tabel 7: Transportkosten van een rit met eigen vrachtwagen (2<sup>de</sup> voorbeeld VRPFC)

<i>i j</i>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	172	129	132	47	124
<b>3</b>	203	133	143	143	188
<b>5</b>	192	129	135	114	164
<b>7</b>	182	130	132	65	129
<b>9</b>	225	170	169	64	125

Tabel 8: Transportkosten van een rit met externe vrachtwagen (2<sup>de</sup> voorbeeld VRPFC)

<b>i</b>	<b>j</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
<b>1</b>		259	194	198	71	185
<b>3</b>		304	199	215	214	282
<b>5</b>		287	194	202	171	247
<b>7</b>		273	195	198	97	193
<b>9</b>		338	255	253	96	187

Een laatste benodigd gegeven is de tijds capaciteit van de vrachtwagens. De tijds capaciteit voor de eigen vrachtwagen blijft 360 minuten, zoals in het eerste voorbeeld. De tijds capaciteit van de externe vrachtwagen wordt vastgelegd op 480 minuten.

#### 4.5.3 Bepaling van geschikte Lagrange multiplicatoren voor het probleem

Ook voor dit voorbeeld kan de belangrijke vraag gesteld worden of de heuristiek het optimale resultaat voor het voorbeeldprobleem zal geven. Daarom wordt in deze paragraaf weer de 'subgradient optimization procedure' gevolgd om Lagrange multiplicatoren voor het voorbeeld te bepalen, waarna in punt 4.5.4 de heuristiek uitgevoerd zal worden en in punt 4.5.5 ter vergelijking de optimale oplossing berekend zal worden. De berekening van de optimale oplossing is ook bij dit voorbeeld mogelijk, aangezien het nog steeds om een klein voorbeeld gaat. Zoals bij het eerste voorbeeld wordt ook hier LINDO gebruikt om de oplossingen voor [PL] en [PF] te vinden.

##### Iteratie 1:

- *Stap 1:*  $Maxiter = 200$ ,  $d_n = 2$ ,  $\bar{Z} = +\infty$ ,  $Iter = 1$ ,  $n = 1$ ,  $BestLB = 0$ ,  $\lambda^1 = \lambda^* = \{0\}$ .
- *Stap 2:* Los probleem [PL] op en bereken de doelfunctiewaarde van [PR]. Laat  $Z_{PR}$  deze doelfunctiewaarde van [PR] zijn. Als  $Z_{PR} > BestLB$ , laat dan  $BestLB = Z_{PR}$ ,  $Iter = 1$ ,  $\lambda^* = \lambda^n$ , anders  $Iter = Iter + 1$ .

- probleem [PL]

$$\begin{aligned} \text{MIN } & 172 Y_{12} + 129 Y_{14} + 132 Y_{16} + 47 Y_{18} + 124 Y_{110} + 203 Y_{32} + 133 Y_{34} \\ & + 143 Y_{36} + 143 Y_{38} + 188 Y_{310} + 192 Y_{52} + 129 Y_{54} + 135 Y_{56} + 114 Y_{58} \\ & + 164 Y_{510} + 182 Y_{72} + 130 Y_{74} + 132 Y_{76} + 65 Y_{78} + 129 Y_{710} + 225 Y_{92} \\ & + 170 Y_{94} + 169 Y_{96} + 64 Y_{98} + 125 Y_{910} \end{aligned}$$

**SUBJECT TO**

$$\sum_i Y_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}; \text{ met } i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}; \text{ met } j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

**END**

INTEGER  $Y_{ij} \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$  en  $\forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$

- gevormde D-P paren als resultaat van [PL]: 1-8 (paar 1), 3-4 (paar 2), 5-6 (paar 3), 7-2 (paar 4) en 9-10 (paar 5)
- $Z_{PR} = 622 > 0 \rightarrow BestLB = 622$
- $Iter = 1, \lambda^* = \{0\}$
- *Stap 3:* Los probleem [PF] op. Laat *FEAS* de doelfunctiewaarde van de toelaatbare oplossing zijn. Als  $FEAS < \bar{Z}$ , laat dan  $\bar{Z} = FEAS$ . Als  $\bar{Z} - BestLB < 1$ , STOP.

- probleem [PF]

$$\begin{aligned} \text{MIN } & 47 Z_{11} + 71 Z_{21} + 133 Z_{12} + 199 Z_{22} + 135 Z_{13} + 202 Z_{23} + 182 \\ & Z_{14} + 273 Z_{24} + 125 Z_{15} + 187 Z_{25} \end{aligned}$$

**SUBJECT TO**

$$\sum_k Z_{kp} = 1 \quad \forall p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}; \text{ met } k \in \{1, 2\}$$

$$35 Z_{11} + 100 Z_{12} + 101 Z_{13} + 137 Z_{14} + 94 Z_{15} < 360$$

$$35 Z_{21} + 100 Z_{22} + 101 Z_{23} + 137 Z_{24} + 94 Z_{25} < 480$$

**END**

INTEGER  $Z_{kp} \quad \forall k \in \{1, 2\}$  en  $\forall p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- vrachtwagen 1: D-P paren 2 (3-4), 3 (5-6) en 4 (7-2)

vrachtwagen 2: D-P paren 1 (1-8) en 5 (9-10)

- $FEAS = 708 < +\infty \rightarrow \bar{Z} = 708$
- $\bar{Z} - BestLB = 708 - 622 = 86 > 1 \rightarrow$  voorwaarde om te stoppen is niet voldaan!
- *Stap 4:* Als  $Iter = 20$ , dan  $Iter = 1$ ,  $\lambda^{n+1} = \lambda^*$ ,  $d = d/2$ ; bereken anders stapgrootte  $t_n$  en pas de multiplicatoren ( $\lambda^n$ ) aan.
  - $Iter = 1 < 20 \rightarrow$  bereken  $t_1$  en  $\lambda^2$  (afgerond op 5 cijfers na de komma)
  - $\|Ax^1 - b\|^2 = (35 + 100 + 101 + 137 + 94 - 360) + (0 - 480) = 241.849$
  - $t_1 = d_1 \cdot (\bar{Z} - Z_{PL}(\lambda)) / \|Ax^1 - b\|^2 = 2 \cdot (708 - 622) / (241.849)$   
 $t_1 = 0,00071$
  - $\lambda_1^2 = \lambda_1^1 + t_1 \cdot (Ax^1 - b) = 0 + 0,00071 \cdot 107 = 0,07610$
  - $\lambda_2^2 = \lambda_2^1 + t_1 \cdot (Ax^1 - b) = 0 + 0,00071 \cdot (-480) = -0,34137$
- *Stap 5:* Laat  $n = n + 1$ . Als  $n > Maxiter$ , STOP; anders: ga naar de volgende stap.
  - $n = 2 < 200 \rightarrow$  ga naar de volgende stap
- *Stap 6:* Als  $\lambda^n < 0$ , stel dan  $\lambda^n = 0$ . Ga vervolgens terug naar stap 2.
  - $\lambda_1^2 = 0,07610 > 0 \rightarrow$  OK
  - $\lambda_2^2 = -0,34137 < 0 \rightarrow \lambda_2^2 = 0$

Iteratie 2:

- $d_n = 2$ ,  $\bar{Z} = 708$ ,  $Iter = 1$ ,  $n = 2$ ,  $BestLB = 622$ ,  $\lambda_1^2 = 0,07610$  en  $\lambda_2^2 = 0$
- *Stap 2:*

- probleem [PL]

$$\begin{aligned} \underline{\text{MIN}} \quad & 181,81652 Y_{12} + 136,38142 Y_{14} + 139,53361 Y_{16} + 49,66340 Y_{18} + + \\ & 131,07703 Y_{110} + 214,56675 Y_{32} + 140,60971 Y_{34} + 151,14239 Y_{36} + \\ & 151,14239 Y_{38} + 198,72969 Y_{310} + 202,95798 Y_{52} + 136,38142 Y_{54} + \\ & 142,68580 Y_{56} + 120,46825 Y_{58} + 173,35994 Y_{510} + 192,42530 Y_{72} + \end{aligned}$$



$$137,45751 Y_{74} + 139,53361 Y_{76} + 68,65266 Y_{78} + 136,38142 Y_{710} + \\ 237,86040 Y_{92} + 179,66433 Y_{94} + 178,58823 Y_{96} + 67,65266 Y_{98} + \\ 132,15312 Y_{910}$$

**SUBJECT TO**

$$\sum_i Y_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}; \text{ met } i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}; \text{ met } j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

**END**

INTEGER  $Y_{ij} \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$  en  $\forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$

- gevormde D-P paren als resultaat van [PL]: 1-8 (paar 1), 3-4 (paar 2), 5-6 (paar 3), 7-2 (paar 4) en 9-10 (paar 5)
- $Z_{PR} = 630,14239 > 622 \rightarrow BestLB = 630,14239$
- $Iter = 1, \lambda_1^* = 0,07610$  en  $\lambda_2^* = 0$

• *Stap 3:*

- probleem [PF]

**MIN**  $47 Z_{11} + 71 Z_{21} + 133 Z_{12} + 199 Z_{22} + 135 Z_{13} + 202 Z_{23} + 182 Z_{14} + 273 Z_{24} + 125 Z_{15} + 187 Z_{25}$

**SUBJECT TO**

$$\sum_k Z_{kp} = 1 \quad \forall p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}; \text{ met } k \in \{1, 2\}$$

$$35 Z_{11} + 100 Z_{12} + 101 Z_{13} + 137 Z_{14} + 94 Z_{15} < 360$$

$$35 Z_{21} + 100 Z_{22} + 101 Z_{23} + 137 Z_{24} + 94 Z_{25} < 480$$

**END**

INTEGER  $Z_{kp} \quad \forall k \in \{1, 2\}$  en  $\forall p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- vrachtwagen 1: D-P paren 2 (3-4), 3 (5-6) en 4 (7-2)
- vrachtwagen 2: D-P paren 1 (1-8) en 5 (9-10)
- $FEAS = 708$ , gelijk aan  $\bar{Z}$  van de vorige iteratie  $\rightarrow \bar{Z}$  blijft 708

- $\bar{Z} - BestLB = 708 - 630,14239 = 77,85761 > 1 \rightarrow$  voorwaarde om te stoppen is niet voldaan!
- *Stap 4:*
  - $Iter = 1 < 20 \rightarrow$  bereken  $t_2$  en  $\lambda^3$  (afgerond op 5 cijfers na de komma)
  - $\|Ax^2 - b\|^2 = (35 + 100 + 101 + 137 + 94 - 360) + (0 - 480) = 241.849$
  - $t_2 = d_2 \cdot (\bar{Z} - Z_{PL}(\lambda)) / \|Ax^2 - b\|^2 = 2 \cdot (708 - 657,53733) / (241.849)$   
 $t_2 = 0,00042$
  - $\lambda_1^3 = \lambda_1^2 + t_2 \cdot (Ax^2 - b) = 0,07610 + 0,00042 \cdot 107 = 0,12075$
  - $\lambda_2^3 = \lambda_2^2 + t_2 \cdot (Ax^2 - b) = 0 + 0,00042 \cdot (-480) = -0,20031$
- *Stap 5:*
  - $n = 3 < 200 \rightarrow$  ga naar de volgende stap
- *Stap 6:*
  - $\lambda_1^3 = 0,12075 > 0 \rightarrow$  OK
  - $\lambda_2^3 = -0,20031 < 0 \rightarrow \lambda_2^3 = 0$

Voor de volgende acht iteraties wordt deze procedure niet meer volledig uitgeschreven en worden enkel de Lagrange multiplicatoren weergegeven in tabel 9. Voor de volledigheid worden de Lagrange multiplicatoren van de eerste twee iteraties ook weergegeven.

Tabel 9:  $\lambda$ -waarden voor de eerste 10 iteraties van de 'subgradient optimization procedure' (2<sup>de</sup> voorbeeld VRPFC)

<b><i>n</i></b>	<b><i>1</i></b>	<b><i>2</i></b>	<b><i>3</i></b>	<b><i>4</i></b>	<b><i>5</i></b>
$\lambda_1^n$	0	0,07610	0,12075	0,14695	0,16232
$\lambda_2^n$	0	0	0	0	0
<b><i>n</i></b>	<b><i>6</i></b>	<b><i>7</i></b>	<b><i>8</i></b>	<b><i>9</i></b>	<b><i>10</i></b>
$\lambda_1^n$	0,17134	0,17664	0,17974	0,18157	0,18264
$\lambda_2^n$	0	0	0	0	0

Uit tabel 9 kan opgemerkt worden dat de waarden van  $\lambda_1^n$  een steeds kleinere stijging vertonen naarmate  $n$  groter wordt. Deze evolutie is het gevolg van de steeds kleiner wordende stapgrootte  $t_n$ . De daling in de stapgrootte is op zijn beurt het gevolg van de verkleining van het verschil tussen  $\bar{Z}$  en  $Z_{PL}(\lambda)$ , de voornaamste term in de teller van de stapgrootte. Bij de tiende iteratie is dit verschil nog slechts 1,20856, terwijl het verschil bij iteratie twee nog 86 was. Vermoedelijk zullen dus zeer veel iteraties nodig zijn vooraleer de procedure stopt. Aangezien het berekenen van zoveel iteraties manueel te veel tijd in beslag neemt, wordt de 'subgradient optimization procedure' hier vroegtijdig beëindigd. Het voornaamste doel van dit voorbeeld was immers de werking van de procedure duidelijk te maken en niet het vinden van een oplossing.

#### 4.5.4 De exacte oplossing van het probleem

Aangezien ook dit tweede probleem een klein voorbeeld vormt, is de berekening van een optimale oplossing mogelijk met behulp van LINDO. De wiskundige formulering van het probleem, waarbij de delen waar dit kan ingekort werden tot formules, is de volgende:

$$\begin{aligned} \text{MIN } & 172 X_{121} + 259 X_{122} + 129 X_{141} + 194 X_{142} + 132 X_{161} + 198 X_{162} + 47 X_{181} + 71 \\ & X_{182} + 124 X_{1101} + 185 X_{1102} + 203 X_{321} + 304 X_{322} + 133 X_{341} + 199 X_{342} + 143 X_{361} \\ & + 215 X_{362} + 143 X_{381} + 214 X_{382} + 188 X_{3101} + 282 X_{3102} + 192 X_{521} + 287 X_{522} + \\ & 129 X_{541} + 194 X_{542} + 135 X_{561} + 202 X_{562} + 114 X_{581} + 171 X_{582} + 164 X_{5101} + 247 \\ & X_{5102} + 182 X_{721} + 273 X_{722} + 130 X_{741} + 195 X_{742} + 132 X_{761} + 198 X_{762} + 65 X_{781} + \\ & 97 X_{782} + 129 X_{7101} + 193 X_{7102} + 225 X_{921} + 338 X_{922} + 170 X_{941} + 255 X_{942} + 169 \\ & X_{961} + 253 X_{962} + 64 X_{981} + 96 X_{982} + 125 X_{9101} + 187 X_{9102} \end{aligned}$$

#### **SUBJECT TO**

$$\sum_i \sum_k X_{ijk} = 1 \quad \forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}; \text{ met } i \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ en } k \in \{1, 2\}$$

$$\sum_j \sum_k X_{ijk} = 1 \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}; \text{ met } j \in \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ en } k \in \{1, 2\}$$

$$129 X_{121} + 97 X_{141} + 99 X_{161} + 35 X_{181} + 93 X_{1101} + 152 X_{321} + 100 X_{341} + 107 X_{361} + \\ 107 X_{381} + 141 X_{3101} + 144 X_{521} + 97 X_{541} + 101 X_{561} + 85 X_{581} + 123 X_{5101} + 137 \\ X_{721} + 98 X_{741} + 99 X_{761} + 48 X_{781} + 97 X_{7101} + 169 X_{921} + 127 X_{941} + 126 X_{961} + 48 \\ X_{981} + 94 X_{9101} < 360$$

$$129 X_{122} + 97 X_{142} + 99 X_{162} + 35 X_{182} + 93 X_{1102} + 152 X_{322} + 100 X_{342} + 107 X_{362} \\ + 107 X_{382} + 141 X_{3102} + 144 X_{522} + 97 X_{542} + 101 X_{562} + 85 X_{582} + 123 X_{5102} + 137 \\ X_{722} + 98 X_{742} + 99 X_{762} + 48 X_{782} + 97 X_{7102} + 169 X_{922} + 127 X_{942} + 126 X_{962} + 48 \\ X_{982} + 94 X_{9102} < 480$$

$$X_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}, \forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ en } \forall k \in \{1, 2\}$$

De volgende oplossing voor dit probleem werd door LINDO gegenereerd:

- doelfunctiewaarde = 708
- $X_{341}, X_{561}, X_{721} = 1$  worden in de eerste eigen vrachtwagen uitgevoerd (heeft dan nog 22 min tijds capaciteit over)
- $X_{182}, X_{9102} = 1$  worden in de tweede eigen vrachtwagen uitgevoerd (heeft dan nog 351 min tijds capaciteit over)
- de niet genoemde variabelen zijn alle gelijk aan 0

Wanneer de locaties opgesomd worden in de volgorde die door de vrachtwagens gevolgd wordt, wordt het volgende resultaat verkregen:

- voor de eerste vrachtwagen: depot – leveringspunt 3 – ophalingspunt 4 – depot – leveringspunt 5 – ophalingspunt 6 – depot – leveringspunt 7 – ophalingspunt 2 – depot
- voor de tweede vrachtwagen: depot – leveringspunt 1 – ophalingspunt 8 – depot – leveringspunt 9 – ophalingspunt 10 – depot

De eigen vrachtwagen bezoekt drie D-P paren, terwijl de externe vrachtwagen de overige twee D-P paren voor zijn rekening neemt.

Aangezien de '*subgradient optimization procedure*' gestopt werd vooraleer geschikte Lagrange multiplicatoren gevonden konden worden, kan geen vergelijking gemaakt worden met de oplossing van het probleem via de heuristiek. Er kan echter wel opgemerkt worden dat alle tien de berekende iteraties van de procedure een oplossing voor [PF] gaven, die gelijk was aan de exacte oplossing voor het probleem.

#### **4.6 Introductie van tijdsvensters**

De aanwezigheid van tijdsvensters kan het rondritplanningsprobleem met ophaling en levering en eenheidsladingen realistischer maken. Vereisten in verband met het tijdstip van de levering en/of de ophaling komen in de snelle wereld van vandaag veelvuldig voor. De toevoeging van tijdsvensters aan het probleem betekent ofwel dat het oplossingsalgoritme van Imai et al. (2007) aangepast dient te worden, zodat ook aan deze beperkingen voldaan wordt, ofwel dat een nieuw oplossingsalgoritme ontwikkeld dient te worden om het rondritplanningsprobleem met ophaling en levering, eenheidsladingen en tijdsvensters op te lossen. Aangezien het algoritme van Imai et al. (2007) gebruik maakt van Lagrange relaxatie, zou een aanpassing van dit algoritme niet eenvoudig zijn en veel tijd in beslag nemen. Daarom wordt gekozen om een nieuw oplossingsalgoritme te ontwikkelen. Het volgende hoofdstuk wordt bijgevolg gewijd aan de beschrijving van het rondritplanningsprobleem met ophaling en levering, eenheidsladingen en tijdsvensters en de uitwerking van een heuristische oplossingsprocedure voor dit probleem.

## **Hoofdstuk 5: Rondritplanning met ophaling en levering, eenheidsladingen en tijdsvensters**

### **5.1 Inleiding**

Zoals reeds vermeld op het einde van het vorige hoofdstuk kan het *'vehicle routing problem with full container load'*, afgekort VRPFC, realistischer gemaakt worden door het toevoegen van tijdsvensters aan het probleem. Hieruit ontstaat het *'vehicle routing problem with full container load and time windows'* of VRPFCTW. Een andere mogelijke benaming voor het probleem is het *'full truckload pickup and delivery problem with time windows'*. In het Nederlands kan gesproken worden van het rondritplanningsprobleem met eenheidsladingen en tijdsvensters. De ontvangers en verladers stellen in dit probleem eisen in verband met de periodes waarin de levering, respectievelijk de ophaling, mag gebeuren. Het tijdsvenster dat gedefinieerd wordt, bestaat uit een interval tussen twee tijdstippen. Deze tijdstippen bepalen het moment waarop de levering/ophaling ten vroegste en/of ten laatste mag beginnen. Het kan in reële situaties voorkomen dat een klant meerdere tijdsvensters opgeeft en de levering/ophaling in één van meerdere toelaatbare tijdsintervallen moet gebeuren. Deze situatie wordt in dit hoofdstuk buiten beschouwing gelaten en vormt een mogelijkheid om verder onderzoek over uit te voeren.

### **5.2 Wiskundige formulering van het VRPFCTW**

De wiskundige formulering van dit rondritplanningsprobleem met eenheidsladingen en tijdsvensters werd door mevrouw A. Caris en prof. dr. G.K. Janssens opgesteld. In het model wordt verondersteld dat de servicetijd nodig voor een ophaling en die voor een levering aan elkaar gelijk zijn en dat de servicetijden gelijk zijn voor iedere locatie. De servicetijd wordt dus verondersteld een constante te zijn. Het probleem kan dan geformuleerd worden als:

$$\text{Minimaliseer } \sum_{i \in V^D} \sum_{j \in V^P} \sum_{k \in K} CR_{ijk} \cdot x_{ijk} \quad (1)$$

Onderworpen aan de beperkingen

$$\sum_{i \in V^D} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in V^P \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V^P} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in V^D \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V^D} \sum_{j \in V^P} T_{ij} \cdot x_{ijk} \leq L_k \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$E_i \leq b_i \leq L_i \quad \forall i \in V^D \quad (5)$$

$$E_j \leq b_j \leq L_j \quad \forall j \in V^P \quad (6)$$

$$b_j \geq b_i + s + t_{ij} - (L_i + s + t_{ij} - E_j) \cdot (1 - \sum_{k \in K} x_{ijk}) \quad \forall i \in V^D, \forall j \in V^P \quad (7)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V^D, \forall j \in V^P, \forall k \in K \quad (8)$$

Waarbij:

$V^D$  : Set van leveringspunten

$i \in V^D$  : Index voor 1 bepaald leveringspunt

$V^P$  : Set van ophaalpunten

$j \in V^P$  : Index voor 1 bepaald ophaalpunt

$K$  : Set van vrachtwagens

$k \in K$  : Index voor 1 bepaalde vrachtwagen

$CR_{ijk}$  : Transportkost opgelopen door  $k$  van het depot naar  $i$ , naar  $j$  en terug naar het depot

$x_{ijk}$  :  $\begin{cases} = 1 & \text{indien een container van } i \text{ naar } j \text{ vervoerd wordt door } k \\ = 0 & \text{anders} \end{cases}$

$T_{ij}$  : De vervoertijd ('hauling time') van het depot naar  $i$ , naar  $j$  en terug naar het depot (servicetijden inbegrepen)

$L_k$  : De tijds capaciteit van  $k$

$E_i$  : Vroegste begintijd van levering op leveringspunt  $i$

- $b_i$  : Begintijd van levering op leveringspunt  $i$
- $L_i$  : Laatste begintijd van levering op leveringspunt  $i$
- $E_j$  : Vroegste begintijd van ophaling op ophaalpunt  $j$
- $b_j$  : Begintijd van ophaling op ophaalpunt  $j$
- $L_j$  : Laatste begintijd van ophaling op ophaalpunt  $j$
- $s$  : Servicetijd voor een ophaling of levering
- $t_{ij}$  : De vervoertijd van  $i$  naar  $j$

De doelfunctie van dit probleem bestaat nog altijd uit het minimaliseren van de transportkosten die opgelopen worden door het uitvoeren van gecombineerde leverings- en ophalingsritten. Met andere woorden, de doelfunctie van het VRPFCTW is dezelfde als de doelfunctie van het VRPFC uit hoofdstuk 4. De set van beperkingen (2) zorgt ervoor dat elk ophalingspunt verbonden is met exact één leveringspunt en exact door één vrachtwagen wordt bezocht. De set van beperkingen (3) zorgt ervoor dat elk leveringspunt met exact één ophalingspunt verbonden is en exact door één vrachtwagen bezocht wordt. Beide sets van beperkingen samen zorgen dat een gecombineerde rit slechts uit één leverings- en één ophalingspunt bestaat en dat deze gecombineerde rit slechts door één vrachtwagen wordt uitgevoerd. Ook dit wijkt niet af van het VRPFC. Elk voertuig kan enkel ritten uitvoeren zolang zijn tijds capaciteit niet overschreden wordt, daarom wordt de set van beperkingen (4) toegevoegd. Ten opzichte van het VRPFC zijn de drie volgende beperkingen, namelijk (5), (6) en (7), nieuwe beperkingen, aangezien deze voor het respecteren van de tijdsvensters moeten zorgen. Beperkingen (5) en (6) zorgen dat de begintijd van de service op het leveringspunt, respectievelijk het ophalingspunt, in het opgegeven tijdsvenster valt. Aangezien de service op het ophalingspunt niet kan beginnen alvorens de service op het overeenkomstige leveringspunt afgelopen is en de vrachtwagen naar het ophalingspunt is gereden, dient de volgende logische relatie steeds geldig te zijn:

$$\sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \Rightarrow b_i + s + t_{ij} \leq b_j \quad \forall i \in V^D, \forall j \in V^P \quad (8)$$



De omzetting van deze logische relatie in de set van beperkingen (7) wordt hierna verantwoord. De set van beperkingen (7) is de volgende:

$$b_j \geq b_i + s + t_{ij} - (L_i + s + t_{ij} - E_j) \cdot (1 - \sum_{k \in K} x_{ijk}) \quad \forall i \in V^D, \forall j \in V^P \quad (7)$$

Wanneer de combinatie van leveringspunt  $i$  en ophalingspunt  $j$  voorkomt, moet de vermelde logische relatie gelden. Dit is steeds het geval, aangezien in de set van beperkingen (7) de term  $(1 - \sum_{k \in K} x_{ijk})$  in dit geval gelijk is aan nul, waardoor het quotiënt na het "groter dan"-teken wegvalt. Indien de combinatie van leveringspunt  $i$  en ophalingspunt  $j$  niet voorkomt, wordt de term  $(1 - \sum_{k \in K} x_{ijk})$  gelijk aan één. De volgende vergelijking wordt dan bekomen:

$$b_j \geq b_i + s + t_{ij} - L_i - s - t_{ij} + E_j.$$

Na herschikking van de term  $E_j$ , kan deze vergelijking als volgt weergegeven worden:

$$b_j - E_j \geq b_i - L_i.$$

Deze vergelijking wordt altijd voldaan, aangezien het deel voor het "groter dan"-teken steeds een positief getal geeft (zie de set van beperkingen (6)) en het deel na het "groter dan"-teken steeds een negatief getal geeft (zie de set van beperkingen (5)). De set van de beperkingen (7) zorgt er dus voor dat de logische relatie (8) gerespecteerd wordt.

### **5.3 De oplossingsprocedure: een invoegheuristiek in twee fasen**

#### **5.3.1 Inleiding**

De oplossingsprocedure die door mevrouw A. Caris en prof. dr. G.K. Janssens wordt voorgesteld om een zo goed mogelijke oplossing te vinden, bestaat uit een invoegheuristiek in twee fasen. In de eerste fase worden 'delivery-pickup' paren gevormd en in de tweede fase worden deze paren toegewezen aan de beschikbare vrachtwagens.

Deze fasen kwamen ook voor in de heuristische oplossingsprocedure voor het VRPFC, maar worden hier anders ingevuld.

### 5.3.2 Fase 1: koppeling van leverings- en ophalingspunten

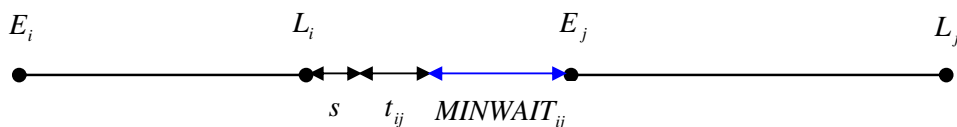
Aangezien door het bestaan van tijdsvensters niet alle combinaties van leverings- en ophalingspunten toelaatbaar zijn, dient eerst nagekeken te worden welke leverings- en ophalingspunten gecombineerd kunnen worden. Hieruit volgt een lijst met toelaatbare combinaties. Het criterium dat hiervoor gebruikt wordt, is het volgende:

$$E_i + s + t_{ij} \leq L_j \quad \forall i \in V^D, \forall j \in V^P$$

Om de wachttijd tussen levering en ophaling te beperken, kan een maximale wachttijd (*MAXWAIT*) geïntroduceerd worden. De lijst met geldige combinaties kan beperkt worden door een toelaatbare combinatie van een levering en een ophaling weg te laten indien de minimale wachttijd (*MINWAIT<sub>ij</sub>*) groter is dan *MAXWAIT*. *MINWAIT<sub>ij</sub>* wordt als volgt gedefinieerd:

$$MINWAIT_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } E_j \leq L_i + s + t_{ij} \\ E_j - (L_i + s + t_{ij}) & \text{anders} \end{cases}$$

Om het begrip minimale wachttijd verder te verduidelijken, wordt figuur 7 gebruikt:



Figuur 7: Illustratie van het begrip minimale wachttijd

Deze figuur geeft de mogelijkheid weer van een minimale wachttijd die groter is dan nul. Zoals de definitie weergeeft, kan de minimale wachttijd ook gelijk zijn aan nul. Dit is het

geval wanneer het laatst mogelijke tijdstip van aankomst op het ophalingspunt ( $L_i + s + t_{ij}$ ) binnen het tijdsvenster valt dat door de ontvanger bepaald wordt.

Nadat de lijst met toelaatbare combinaties opgesteld is, kunnen deze combinaties geselecteerd worden. Bij de keuze van een combinatie wordt met twee aspecten rekening gehouden. Als eerste aspect wordt rekening gehouden met de tijdsbesparing die optreedt door het samenvoegen van een leveringspunt en een ophalingspunt in een gecombineerde rit. De tijdsbesparing wordt gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} & t_{0i} + t_{i0} + t_{0j} + t_{j0} - (t_{0i} + t_{ij} + t_{j0}) \\ &= 2 \cdot t_{0i} + 2 \cdot t_{j0} - (t_{0i} + t_{ij} + t_{j0}) \\ &= t_{0i} + t_{j0} - t_{ij} \end{aligned}$$

Deze tijdsbesparing dient zo groot mogelijk te zijn:

$$\text{Maximaliseer } t_{0i} + t_{j0} - t_{ij}$$

waarbij:

$t_{0i}$  : De vervoertijd van het depot naar  $i$

$t_{j0}$  : De vervoertijd van  $j$  naar het depot

$t_{ij}$  : De vervoertijd van  $i$  naar  $j$

Als tweede aspect wordt ook rekening gehouden met de wachttijd tussen levering en ophaling. De speling tussen het tijdsvenster voor de levering en het tijdsvenster van de ophaling dient zo klein mogelijk te zijn:

$$\text{Minimaliseer } L_j - E_i - s - t_{ij}.$$

Als beide aspecten samengebracht worden, ontstaat het criterium dat gebruikt wordt om de combinaties van leveringspunten en ophalingspunten te selecteren. In dit selectiecriterium worden wegingscoëfficiënten, namelijk  $w_1$  en  $w_2$ , gebruikt om het belang van elk van de aspecten, namelijk tijdsbesparing en wachttijDMINIMALISATIE, aan te

duiden. Het selectie criterium leidt tot een rangschikking van de toelaatbare combinaties. Deze rangschikking bepaalt welke combinaties achtereenvolgens toegewezen worden aan een vrachtwagen, totdat alle leverings- en ophalingspunten in een route zitten. Het selectie criterium wordt als volgt geformuleerd:

$$\text{Minimaliseer } w_1 \cdot (L_j - E_i - s - t_{ij}) + w_2 \cdot (t_{ij} - t_{0i} - t_{j0}).$$

### 5.3.3 Fase 2: toewijzing van de gekoppelde leverings- en ophalingspunten aan de vloot

In deze fase worden de gevormde 'delivery-pickup' paren (D-P paren) toegewezen aan de vrachtwagens uit de vloot. De gecombineerde ritten worden zoveel mogelijk toegewezen aan de vrachtwagens die de laagste transportkosten met zich mee brengen. De D-P paren worden toegevoegd aan de routes van de vrachtwagens, waarbij de combinatie met de kleinste laatst toelaatbare begintijd van het D-P paar  $(i, j)$  ( $L_{ij}$ ) eerst wordt toegevoegd. Daarna worden de D-P paren toegewezen volgens stijgende laatst toelaatbare begintijden van de bediening op het leveringspunt. De laatst toelaatbare begintijd van de service aan D-P paar  $(i, j)$  wordt als volgt gedefinieerd:

$$L_{ij} = \text{Min} \{L_i - t_{0i}; L_j - t_{ij} - s - t_{0i}\}.$$

De tijd nodig om D-P paar  $(i, j)$  te bedienen ( $RS_{ij}$ ) is gelijk aan de som van de vervoertijden, servicetijden en de minimale wachttijd:

$$RS_{ij} = 2 \cdot s + t_{0i} + t_{ij} + t_{j0} + \text{MINWAIT}_{ij}.$$

Een D-P paar kan toegewezen worden aan vrachtwagen  $k$  indien het tijdsvenster van de verlader toelaat dat de service op het leveringspunt begint nadat de service aan de reeds aan vrachtwagen  $k$  toegewezen D-P paren afgerond is. De vrachtwagen moet na het bezoek aan het ophalingspunt van het laatst toegewezen D-P paar de tijd hebben om terug naar het depot te rijden en vervolgens naar het nieuwe toe te wijzen leveringspunt te rijden alvorens de service daar te beginnen. Een andere voorwaarde voor toewijzing

van een D-P paar aan vrachtwagen  $k$  bestaat eruit dat deze vrachtwagen na de service aan dit D-P paar binnen de grenzen van zijn tijds capaciteit naar het depot kan terugkeren. Laat de routeservicetijd  $RS_k$  de tijd zijn waarop vrachtwagen  $k$  na de laatste ophaling terug in het depot aankomt. De voorgaande beperkingen kunnen dan geschreven worden als:

$$RS_k \leq L_{ij} \quad \text{en} \quad L_{ij} + RS_{ij} \leq L_k .$$

De routeservicetijd  $RS_k$  is dus de tijd die de vrachtwagen nodig heeft om alle aan hem toegewezen paren te bedienen. Initieel wordt deze grootheid gelijkgesteld aan nul, aangezien bij de start van deze fase de vrachtwagens nog geen D-P paren toegewezen hebben gekregen. De routeservicetijd van vrachtwagen  $k$  wordt na elke toewijzing van een D-P paar aan deze vrachtwagen geactualiseerd.

Wanneer het nieuw toe te wijzen D-P paar aan meer dan één vrachtwagens toegewezen kan worden, valt de keuze allereerst op de vrachtwagen met de laagste transportkosten. Bij gelijke transportkosten, valt de keuze op die vrachtwagen waarbij de kleinste wachttijd bestaat tussen het beëindigen van de laatst toegewezen gecombineerde rit en het begin van de nieuw toe te wijzen gecombineerde rit. Indien deze regel nog steeds geen voorkeur voor een bepaalde vrachtwagen vormt, wordt willekeurig gekozen aan welke vrachtwagen het D-P paar wordt toegewezen. Nadat een nieuw paar toegewezen is aan vrachtwagen  $k$ , wordt de routeservicetijd voor die vrachtwagen bijgewerkt:

$$RS_k = L_{ij} + RS_{ij} .$$

## **5.4 Illustratie aan de hand van een voorbeeld met uitsluitend eigen vrachtwagens**

### **5.4.1 Inleiding**

Als illustratie van de heuristische oplossingsprocedure voor het VRPFCTW, wordt een voorbeeld met vijf leveringspunten en vijf ophalingspunten aangewend, zodat maximaal vijf D-P paren gevormd zullen worden in de oplossing. De vloot bestaat uit twee eigen vrachtwagens.

### **5.4.2 De data**

Dit voorbeeld wordt op dezelfde gegevens gebaseerd als het eerste cijfervoorbeeld uit hoofdstuk 4 (paragraaf 4.4), aangevuld met de nodige extra informatie. De transportkosten en de tijds capaciteit van de eigen vrachtwagens (= 360 minuten) blijven gelijk. De vervoertijd uit de gegevens van punt 4.4.2 wordt hier opgesplitst in drie delen, namelijk de tijd nodig om van het depot naar het leveringspunt te rijden, de tijd nodig om van het leveringspunt naar het ophalingspunt te rijden en ten slotte de tijd nodig om van het ophalingspunt terug naar het depot te rijden. De leveringspunten hebben een index  $i$  en de ophalingspunten een index  $j$ . De gegevens die in deze paragraaf vermeld worden, worden in de tabellen 10, 11 en 12 weergegeven.

Tabel 10: Transportkosten van een rit met eigen vrachtwagen (voorbeeld VRPFCTW)

<b><math>i</math></b>	<b><math>j</math></b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
<b>1</b>		172	129	132	47	124
<b>3</b>		203	133	143	143	188
<b>5</b>		192	129	135	114	164
<b>7</b>		182	130	132	65	129
<b>9</b>		225	170	169	64	125

Tabel 11: Vervoertijden tussen het depot en de leverings-, resp. ophalingspunten (voorbeeld VRPFCTW)

<b>i</b>		<b>j</b>	
<b>1</b>	9	<b>2</b>	63
<b>3</b>	47	<b>4</b>	48
<b>5</b>	36	<b>6</b>	49
<b>7</b>	18	<b>8</b>	12
<b>9</b>	24	<b>10</b>	44

Tabel 12: Vervoertijden tussen de leverings- en ophalingspunten onderling (voorbeeld VRPFCTW)

<b>i j</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	57	40	41	14	40
<b>3</b>	42	5	11	48	50
<b>5</b>	45	13	16	37	43
<b>7</b>	56	32	32	18	35
<b>9</b>	82	55	53	12	26

In paragraaf 4.4, bij het eerste cijfervoorbeeld voor het VRPFC, werd impliciet aangenomen dat de vervoertijd de servicetijden op de locaties omvatte. In dit voorbeeld wordt een specifiek getal geplakt op die servicetijd, namelijk 8 minuten. Zoals eerder vermeld werd, wordt verondersteld dat deze servicetijd gelijk is voor alle leveringen en ophalingen. De som van de vervoertijden en de servicetijden voor de gecombineerde ritten, wordt in tabel 13 weergegeven.

Tabel 13: Som van de vervoertijden en de servicetijden per gecombineerde rit (voorbeeld VRPFCTW)

<b>i j</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	145	113	115	51	109
<b>3</b>	168	116	123	123	157
<b>5</b>	160	113	117	101	139
<b>7</b>	153	114	115	64	113
<b>9</b>	185	143	142	64	110

Vervolgens dienen ook tijdsvensters gedefinieerd te worden per leverings- en ophalingspunt:

Tabel 14: Tijdsvensters voor de leverings- en ophalingspunten (voorbeeld VRPFCTW)

<b>i</b>	$E_i$	$L_i$	<b>j</b>	$E_j$	$L_j$
<b>1</b>	10	100	<b>2</b>	0	100
<b>3</b>	50	250	<b>4</b>	100	280
<b>5</b>	80	180	<b>6</b>	200	260
<b>7</b>	50	360	<b>8</b>	80	320
<b>9</b>	100	300	<b>10</b>	5	80

Verder dient voor toepassing van de heuristiek de maximaal toegelaten wachttijd tussen levering en ophaling (*MAXWAIT*) vastgelegd te worden. Deze wordt in dit cijfervoorbeeld gelijkgesteld aan 30 minuten. Als laatste worden de wegingscoëfficiënten, nodig voor de berekening van het selectiecriterium voor de D-P paren, gekozen. Drie mogelijke scenario's worden hier gekozen om later een vergelijking te kunnen maken tussen de verkregen oplossingen. In het eerste scenario zijn beide aspecten van het criterium even belangrijk. In het tweede, respectievelijk het derde scenario, is het aspect wachttijdminimalisatie, respectievelijk tijdsbesparing, veel belangrijker dan het andere aspect.

Tabel 15: Wegingscoëfficiënten voor het selectiecriterium (voorbeeld VRPFCTW)

<b>wegingscoëfficiënten</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
$w_1$	5	7	3
$w_2$	5	3	7

### 5.4.3 De oplossing van het probleem via de heuristiek

#### 5.4.3.1 Fase 1: koppeling van leverings- en ophalingspunten

Een eerste stap in deze fase is het nakijken welke combinaties van leverings- en ophalingspunten niet toelaatbaar zijn door een conflict van hun tijdsvensters. In tabel 16 wordt deze test weergegeven voor elk D-P paar. Wanneer in de laatste kolom "OK" wordt



vermeld, betekent dit dat de tijdsvensters van deze combinatie verenigbaar zijn. De vermelding "NOK" betekent dat dit niet het geval is. Bij deze combinaties arriveert de vrachtwagen na de service op het leveringspunt niet op tijd op het ophalingspunt, zodat de combinatie van deze punten niet mogelijk is.

Tabel 16: Test verenigbaarheid tijdsvensters van de leveringen en de ophalingen

D-P paar	$E_i + s + t_{ij}$	$L_j$	$E_i + s + t_{ij} \leq L_j$
1 – 2	75	100	OK
1 – 4	58	280	OK
1 – 6	59	260	OK
1 – 8	32	320	OK
1 – 10	58	80	OK
3 – 2	100	100	OK
3 – 4	63	280	OK
3 – 6	69	260	OK
3 – 8	106	320	OK
3 – 10	108	80	NOK
5 – 2	133	100	NOK
5 – 4	101	280	OK
5 – 6	104	260	OK
5 – 8	125	320	OK
5 – 10	131	80	NOK
7 – 2	114	100	NOK
7 – 4	90	280	OK
7 – 6	90	260	OK
7 – 8	76	320	OK
7 – 10	93	80	NOK
9 – 2	190	100	NOK
9 – 4	163	280	OK
9 – 6	161	260	OK
9 – 8	120	320	OK
9 – 10	134	80	NOK

Zeven D-P paren kunnen met deze test verwijderd worden uit de lijst van toelaatbare gecombineerde ritten. Om de lijst misschien verder te verkleinen wordt getest of de minimale wachttijd tussen de levering en de ophaling van een D-P paar kleiner is dan de toegelaten maximale wachttijd, die gelijkgesteld werd aan 30 minuten. De definitie van de minimale wachttijd wordt hier even herhaald om tabel 17 met de wachttijdtest duidelijker te maken.

$$MINWAIT_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } E_j \leq L_i + s + t_{ij} \\ E_j - (L_i + s + t_{ij}) & \text{anders} \end{cases}$$

Tabel 17: Test voor de wachttijden tussen de leveringen en de ophalingen

D-P paar	$E_i$	$L_i + s + t_{ij}$	$MINWAIT_{ij}$	$\leq 30$
1 - 2	0	165	0	OK
1 - 4	100	148	0	OK
1 - 6	200	149	51	NOK
1 - 8	80	122	0	OK
1 - 10	5	148	0	OK
3 - 2	0	300	0	OK
3 - 4	100	263	0	OK
3 - 6	200	269	0	OK
3 - 8	80	306	0	OK
5 - 4	100	201	0	OK
5 - 6	200	204	0	OK
5 - 8	80	225	0	OK
7 - 4	100	400	0	OK
7 - 6	200	400	0	OK
7 - 8	80	386	0	OK
9 - 4	280	363	0	OK
9 - 6	200	361	0	OK
9 - 8	80	320	0	OK

Enkel D-P paar 1-6 wordt bij deze test uitgesloten als toelaatbare gecombineerde rit, waardoor zeventien D-P paren overblijven. Van deze zeventien paren dienen vervolgens

vijf D-P paren geselecteerd te worden in deze eerste fase van de heuristiek, met behulp van het selectiecriterium:

$$\text{Minimaliseer } w_1 \cdot (L_j - E_i - s - t_{ij}) + w_2 \cdot (t_{ij} - t_{0i} - t_{j0}).$$

Aangezien in punt 5.4.2 drie verschillende scenario's werden voorgesteld met betrekking tot de wegingscoëfficiënten voor het selectiecriterium, worden drie verschillende rangschikkingen van D-P paren verkregen. In het eerste scenario (A) worden beide wegingscoëfficiënten gelijk gesteld aan vijf. Deze situatie wordt weergegeven in tabel 18.

Tabel 18: Rangschikking van D-P paren volgens selectiecriterium A

D-P paar	Selectiecriterium A
3 – 2	-340
1 – 10	45
1 – 2	50
9 – 6	395
5 – 6	435
9 – 4	500
3 – 6	530
5 – 4	540
3 – 4	635
7 – 6	675
7 – 4	780
9 – 8	880
5 – 8	920
3 – 8	1015
1 – 4	1025
7 – 8	1160
1 – 8	1405

Voor het tweede scenario (B) wordt meer belang gehecht aan het eerste aspect, namelijk wachttijdminimalisatie tussen twee gecombineerde ritten, met een wegingscoëfficiënt van zeven, terwijl het aspect tijdsbesparing door het combineren van ritten een wegingscoëfficiënt van drie krijgt. Tabel 19 geeft deze situatie weer.

Tabel 19: Rangschikking van D-P paren volgens selectiecriteria B

D-P paar	Selectiecriteria B
3 – 2	-204
1 – 10	115
1 – 2	130
9 – 6	633
9 – 4	768
5 – 6	885
5 – 4	1040
3 – 6	1082
7 – 6	1085
7 – 4	1228
3 – 4	1249
9 – 8	1328
5 – 8	1332
3 – 8	1465
1 – 4	1503
7 – 8	1672
1 – 8	1995

Voor het derde en laatste scenario (C) wordt meer belang gehecht aan het tweede aspect, namelijk tijdsbesparing door het combineren van ritten, met een wegingscoëfficiënt van zeven, terwijl het aspect wachttijdminimalisatie tussen twee gecombineerde ritten een wegingscoëfficiënt van drie krijgt. De rangschikking voor deze situatie wordt getoond in tabel 20.

Tabel 20: Rangschikking van D-P paren volgens selectiecriteria C

D-P paar	Selectiecriteria C
3 – 2	-476
1 – 2	-30
1 – 10	-25
3 – 6	-22
5 – 6	-15
3 – 4	21

5 – 4	40
9 – 6	157
9 – 4	232
7 – 6	265
7 – 4	332
9 – 8	432
5 – 8	508
1 – 4	547
3 – 8	565
7 – 8	648
1 – 8	815

De geselecteerde D-P paren zijn bij elke rangschikking in het groen weergegeven. Bij scenario B verandert ten opzichte van scenario A niets aan de geselecteerde D-P paren, alhoewel de rangschikking van de D-P paren iets verschilt. Bij scenario C worden daarentegen andere D-P paren geselecteerd dan bij scenario A en B.

#### 5.4.3.2 Fase 2: toewijzing van de gekoppelde leverings- en ophalingspunten aan de vloot

Eenmaal de uit te voeren D-P paren gekend zijn, dienen deze nog toegewezen te worden aan een vrachtwagen. De volgorde waarin deze toewijzingen gebeuren, wordt bepaald door de laatste toelaatbare begintijd van het D-P paar ( $L_{ij}$ ). De definitie van deze variabele is de volgende:

$$L_{ij} = \text{Min} \{ L_i - t_{0i}; L_j - t_{ij} - s - t_{oi} \}.$$

In tabel 21 wordt de rangschikking (van laag naar hoog) van de laatst toelaatbare begintijden van de vijf geselecteerde D-P paren weergegeven voor scenario A met beide wegingscoëfficiënten in het selectiecriterium gelijk aan vijf. Aangezien bij elke mogelijke toewijzing nagekeken moet worden of aan de twee voorwaarden voldaan is, worden in tabel 22 de tijd nodig om een D-P paar te bedienen (bedieningstijd  $RS_{ij}$ ) en de som hiervan met de laatst toelaatbare begintijd ( $L_{ij}$ ) weergegeven.

Voorwaarden voor toewijzing aan vrachtwagen  $k$  zijn:  $RS_k \leq L_{ij}$  en  $L_{ij} + RS_{ij} \leq L_k$

Tabel 21: D-P paren uit scenario A, gerangschikt volgens de laatst toelaatbare begintijden

D-P paar	$L_i - t_{0i}$	$L_j - t_{ij} - s - t_{0i}$	$L_{ij}$
3 - 2	203	3	3
1 - 10	91	23	23
5 - 4	144	223	144
9 - 6	276	175	175
7 - 8	342	276	276

Tabel 22: Bedieningstijden D-P paren uit scenario A en de som met de laatst toelaatbare begintijden

D-P paar	$RS_{ij}$	$L_{ij} + RS_{ij}$
3 - 2	168	171
1 - 10	109	132
5 - 4	113	257
9 - 6	142	317
7 - 8	64	340

De volgende stap in de heuristiek is de effectieve toewijzing van de geselecteerde D-P paren aan de twee eigen vrachtwagens. De routeservicetijd wordt voor beide vrachtwagens initieel gelijk gesteld aan nul en wordt na elke toewijzing aangepast. Voor scenario A ziet de procedure er als volgt uit:

- Volgorde van toewijzing: 3-2, 1-10, 5-4, 9-6 en 7-8
- Initieel:  $RS_1 = RS_2 = 0$
- Het eerste D-P paar (3-2) kan aan beide vrachtwagens toegewezen worden: de kosten van beide vrachtwagens zijn gelijk en, vermits 'geen voorgaand paar' bestaat, is de wachttijd gelijk aan nul. Daarom wordt ervoor gekozen D-P paar 3-2 aan vrachtwagen één toe te wijzen. Natuurlijk moet nagekeken worden of er wel aan de voorwaarden voldaan is:
  - $RS_1 \leq L_{32} : 0 \leq 3 \rightarrow \text{OK}$
  - $L_{32} + RS_{32} \leq L_1 : 171 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

- Voorwaarden OK → bijwerken  $RS_k$ :  $RS_1 = L_{32} + RS_{32} = 171$
- Vervolgens dient D-P paar 1-10 toegewezen te worden. Eerst wordt nagekeken of dit paar aan de route van vrachtwagen één kan toegevoegd worden:
  - $RS_1 \leq L_{110}$  :  $171 \leq 23$  → **NOK**
  - $L_{110} + RS_{110} \leq L_1$  :  $132 \leq 360$  → OK

Aangezien deze mogelijkheid niet toelaatbaar is, wordt gekeken of het D-P paar aan de tweede vrachtwagen toegevoegd kan worden:

- $RS_2 \leq L_{110}$  :  $0 \leq 23$  → OK
- $L_{110} + RS_{110} \leq L_2$  :  $132 \leq 360$  → OK

De voorwaarden zijn voldaan zodat D-P paar 1-10 zonder problemen aan vrachtwagen twee toegewezen kan worden.

- bijwerken  $RS_k$ :  $RS_2 = L_{110} + RS_{110} = 132$
- D-P paar 5-4 is het volgende paar dat aan een vrachtwagen toegewezen moet worden. Is vrachtwagen één hier een mogelijkheid?:
  - $RS_1 \leq L_{54}$  :  $171 \leq 144$  → **NOK**
  - $L_{54} + RS_{54} \leq L_1$  :  $257 \leq 360$  → OK

Toewijzing aan vrachtwagen één blijkt niet toelaatbaar te zijn, waardoor de voorwaarden voor toewijzing aan de tweede vrachtwagen nagekeken moeten worden:

- $RS_2 \leq L_{54}$  :  $132 \leq 144$  → OK
- $L_{54} + RS_{54} \leq L_2$  :  $257 \leq 360$  → OK

D-P paar 5-4 wordt dus aan de tweede vrachtwagen toegewezen.

- bijwerken  $RS_k$ :  $RS_2 = L_{54} + RS_{54} = 257$
- Als vierde dient D-P paar 9-6 toegewezen te worden. Eerst wordt gekeken of dit paar aan de route van vrachtwagen één toegevoegd kan worden:
  - $RS_1 \leq L_{96}$  :  $171 \leq 175$  → OK
  - $L_{96} + RS_{96} \leq L_1$  :  $317 \leq 360$  → OK

Dit is een mogelijkheid, maar toch dient nagekeken te worden toewijzing aan de tweede vrachtwagen toelaatbaar is. Het kan immers zo zijn dat de wachttijd tussen het einde van de vorige gecombineerde rit en de start van de bediening van dit D-P paar kleiner is voor vrachtwagen twee.

- $RS_2 \leq L_{96} : 257 \leq 175 \rightarrow \text{NOK}$
- $L_{96} + RS_{96} \leq L_2 : 317 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

Aangezien een toewijzing aan vrachtwagen twee niet toelaatbaar is, wordt D-P paar 9-6 aan de eerste vrachtwagen toegewezen.

- bijwerken  $RS_k : RS_1 = L_{96} + RS_{96} = 317$

- Tenslotte wordt D-P paar 7-8 nog toegewezen. Kan dit D-P paar toegevoegd worden aan de route van vrachtwagen één?:

- $RS_1 \leq L_{78} : 317 \leq 276 \rightarrow \text{NOK}$
- $L_{78} + RS_{78} \leq L_1 : 340 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

Deze mogelijkheid kan niet, waardoor nagekeken moet worden of het paar aan de tweede vrachtwagen toegevoegd kan worden:

- $RS_2 \leq L_{78} : 257 \leq 276 \rightarrow \text{OK}$
- $L_{78} + RS_{78} \leq L_2 : 340 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

D-P paar 7-8 wordt dus als derde paar aan de tweede vrachtwagen toegewezen.

- bijwerken  $RS_k : RS_2 = L_{78} + RS_{78} = 340$

- Resultaat:

Vrachtwagen één bedient D-P paren 3-2 en 9-6, waarbij respectievelijk transportkosten van 203 en 169 opgelopen worden.

Vrachtwagen twee bedient D-P paren 1-10, 5-4 en 7-8, waarbij de kosten respectievelijk gelijk zijn aan 124, 129 en 65.

De totale transportkosten voor deze toewijzingen zijn gelijk aan 690.

Bij scenario B, waarbij de wegingscoëfficiënten voor het selectiecriterium zeven, respectievelijk drie zijn, worden dezelfde D-P paren geselecteerd. Hierdoor verloopt de tweede fase in scenario B zoals voor scenario A en zijn de waarden uit de tabellen 21 en



22 van scenario A dezelfde als de waarden voor scenario B. Het verloop van de procedure wordt daarom niet herhaald.

Het verloop van de tweede fase voor het laatste scenario, namelijk scenario C met de wegingscoëfficiënten voor het selectiecriterium gelijk aan drie, respectievelijk zeven, wordt hieronder uitgewerkt, waarbij eerst de nodige berekende gegevens worden gegeven in tabel 23 en 24.

Tabel 23: D-P paren uit scenario C, gerangschikt volgens de laatst toelaatbare begintijden

D-P paar	$L_i - t_{0i}$	$L_j - t_{ij} - s - t_{0i}$	$L_{ij}$
3 - 2	203	3	3
1 - 10	91	23	23
5 - 4	144	223	144
9 - 6	276	175	175
7 - 8	342	276	276

Tabel 24: Bedieningstijden D-P paren uit scenario C en de som met de laatst toelaatbare begintijden

D-P paar	$RS_{ij}$	$L_{ij} + RS_{ij}$
3 - 2	168	171
1 - 10	109	132
5 - 4	113	257
9 - 6	142	317
7 - 8	64	340

De effectieve toewijzing van de geselecteerde D-P paren aan de twee eigen vrachtwagens, gebeurt voor scenario C als volgt:

- Volgorde van toewijzing: 3-2, 1-10, 5-6, 9-4 en 7-8
- Initieel:  $RS_1 = RS_2 = 0$
- Het eerste D-P paar (3-2) kan weer aan beide vrachtwagens toegewezen worden zonder voorkeur voor een van de twee vrachtwagens. Daarom wordt gekozen D-P paar 3-2 aan vrachtwagen één toe te wijzen, maar is hiervoor wel aan de voorwaarden voldaan:

- $RS_1 \leq L_{32} : 0 \leq 3 \rightarrow \text{OK}$
- $L_{32} + RS_{32} \leq L_1 : 171 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$
- Voorwaarden OK  $\rightarrow$  bijwerken  $RS_k : RS_1 = L_{32} + RS_{32} = 171$
- Vervolgens wordt D-P paar 1-10 toegewezen. Eerst wordt nagekeken of dit paar aan de route van vrachtwagen één kan toegevoegd worden:
  - $RS_1 \leq L_{110} : 171 \leq 23 \rightarrow \text{NOK}$
  - $L_{110} + RS_{110} \leq L_1 : 132 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

Aangezien deze mogelijkheid niet kan, wordt gekeken of het D-P paar aan de tweede vrachtwagen toegevoegd kan worden:

- $RS_2 \leq L_{110} : 0 \leq 23 \rightarrow \text{OK}$
- $L_{110} + RS_{110} \leq L_2 : 132 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

De voorwaarden zijn voldaan zodat D-P paar 1-10 aan vrachtwagen twee toegewezen wordt.

- bijwerken  $RS_k : RS_2 = L_{110} + RS_{110} = 132$

- D-P paar 5-6 is het volgende paar dat aan een vrachtwagen toegewezen dient te worden. Is toewijzing aan vrachtwagen één hier toelaatbaar?:
  - $RS_1 \leq L_{56} : 171 \leq 144 \rightarrow \text{NOK}$
  - $L_{56} + RS_{56} \leq L_1 : 261 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

Deze mogelijkheid blijkt niet toegelaten, waardoor de voorwaarden voor toewijzing aan de tweede vrachtwagen nagekeken moeten worden:

- $RS_2 \leq L_{56} : 132 \leq 144 \rightarrow \text{OK}$
- $L_{56} + RS_{56} \leq L_2 : 261 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

D-P paar 5-6 wordt dus aan de tweede vrachtwagen toegewezen.

- bijwerken  $RS_k : RS_2 = L_{56} + RS_{56} = 261$

- Als vierde wordt D-P paar 9-4 toegewezen. Eerst wordt gekeken of dit paar aan de route van vrachtwagen één toegevoegd kan worden:
  - $RS_1 \leq L_{94} : 171 \leq 193 \rightarrow \text{OK}$

- $L_{94} + RS_{94} \leq L_1 : 336 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

Toewijzing van D-P paar 9-4 aan vrachtwagen één is toelaatbaar, maar de mogelijkheid van toewijzing aan de tweede vrachtwagen dient ook nagekeken te worden:

- $RS_2 \leq L_{94} : 261 \leq 193 \rightarrow \text{NOK}$

- $L_{94} + RS_{94} \leq L_2 : 336 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

Aangezien de toewijzing aan de tweede vrachtwagen niet toelaatbaar is, krijgt de eerste vrachtwagen D-P paar 9-4 toegewezen.

- bijwerken  $RS_k : RS_1 = L_{94} + RS_{94} = 336$

- Tenslotte wordt D-P paar 7-8 nog toegewezen. Kan een toewijzing aan vrachtwagen één?:

- $RS_1 \leq L_{78} : 336 \leq 276 \rightarrow \text{NOK}$

- $L_{78} + RS_{78} \leq L_1 : 340 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

Deze mogelijkheid kan niet, waardoor nagekeken moet worden of het D-P paar aan de tweede vrachtwagen toegevoegd kan worden:

- $RS_2 \leq L_{78} : 261 \leq 276 \rightarrow \text{OK}$

- $L_{78} + RS_{78} \leq L_2 : 340 \leq 360 \rightarrow \text{OK}$

D-P paar 7-8 wordt dus als derde paar aan de tweede vrachtwagen toegewezen.

- bijwerken  $RS_k : RS_2 = L_{78} + RS_{78} = 340$

- Resultaat:

Vrachtwagen één bedient D-P paren 3-2 en 9-4, waarbij respectievelijk transportkosten van 203 en 170 opgelopen worden.

Vrachtwagen twee bedient D-P paren 1-10, 5-6 en 7-8, waarbij de kosten respectievelijk gelijk zijn aan 124, 135 en 65.

De totale transportkosten voor deze toewijzingen zijn gelijk aan 697.

#### 5.4.3.3 Vergelijking van de drie scenario's

Bij vergelijking van de drie scenario's met de verschillende wegingscoëfficiënten voor de twee aspecten van het selectiecriterium, bestaat er geen verschil tussen scenario A en scenario B. Scenario C wijkt licht af van de andere twee scenario's. Drie van de vijf geselecteerde D-P paren blijven gelijk ten opzichte van scenario A en B, namelijk de D-P paren 3-2, 1-10 en 7-8. De overige twee geselecteerde D-P paren verschillen. Leveringspunt 5 wordt met ophalingspunt 6 gecombineerd, in plaats van met ophalingspunt 4 zoals in scenario A en B, terwijl leveringspunt 9 met ophalingspunt 4 gecombineerd wordt en niet met ophalingspunt 6 zoals in scenario A en B. Ook blijken voor scenario C de totale transportkosten zeven eenheden hoger te liggen dan voor scenario A en B.

In dit voorbeeld blijkt dat de totale transportkosten lager liggen wanneer aan het aspect tijdsbesparing, door het combineren van ritten, meer belang wordt gehecht dan aan het aspect minimalisatie van de wachttijd tussen de levering en de ophaling. Natuurlijk gaat het hier slechts om één cijfervoorbeeld met drie verschillende scenario's. Algemene besluiten kunnen pas getrokken worden na het uitvoeren van voldoende empirisch onderzoek.

#### **5.4.4 De exacte oplossing van het probleem**

Aangezien het om een klein voorbeeld gaat, is het mogelijk dit exact op te lossen met behulp van LINDO. De volledige wiskundige formulering van het probleem is door de vele beperkingen in bijlage toegevoegd (zie bijlage 4).

De volgende oplossing voor dit probleem werd door LINDO gegenereerd:

- Doelfunctiewaarde = 652
- $X_{1101}, X_{321} = 1$  worden in de eerste eigen vrachtwagen uitgevoerd
- $X_{542}, X_{762}, X_{982} = 1$  worden in de tweede eigen vrachtwagen uitgevoerd

- De niet genoemde  $X$  - variabelen zijn allen gelijk aan 0

Wanneer de locaties opgesomd worden in de volgorde die door de vrachtwagens gevolgd worden, wordt het volgende resultaat verkregen:

- voor de eerste vrachtwagen: depot – leveringspunt 1 – ophalingspunt 10 – depot – leveringspunt 3 – ophalingspunt 2 – depot
- voor de tweede vrachtwagen: depot – leveringspunt 5 – ophalingspunt 4 – depot – leveringspunt 7 – ophalingspunt 6 – depot – leveringspunt 9 – ophalingspunt 8 – depot

De eerste eigen vrachtwagen bezoekt twee D-P paren, terwijl de tweede eigen vrachtwagen de overige drie D-P paren voor zijn rekening neemt.

De drie oplossingen die via de heuristiek werden gevonden, waren de volgende:

- Scenario A:
  - vrachtwagen één bedient D-P paren 3-2 en 9-6
  - vrachtwagen twee bedient D-P paren 1-10, 5-4 en 7-8
  - totale kosten = 690
- Scenario B:
  - vrachtwagen één bedient D-P paren 3-2 en 9-6
  - vrachtwagen twee bedient D-P paren 1-10, 5-4 en 7-8
  - totale kost = 690
- Scenario C:
  - vrachtwagen één bedient D-P paren 3-2 en 9-4
  - vrachtwagen twee bedient D-P paren 1-10, 5-6 en 7-8
  - totale kost = 697

Scenario A en B hebben drie gevormde D-P paren (1-10, 3-2 en 5-4) gemeen met de exacte oplossing, waardoor de totale kost van deze twee scenario's dichterbij de exacte totale kost ligt dan de totale kost van scenario C, dat slechts twee D-P paren (1-10 en 3-2) met de exacte oplossing gemeen heeft.

### **5.5 Aanbevelingen voor verder onderzoek**

Ter afsluiting van dit hoofdstuk worden nog enkele aanbevelingen voor verder onderzoek gedaan. Ten eerste verdient het aanbeveling om, zoals reeds vermeld, voldoende empirisch onderzoek uit te voeren zodat algemene besluiten getrokken kunnen worden over de kwaliteit van de gebruikte invoegheuristiek en over de invloed van elk van de twee aspecten van het gebruikte selectie criterium op de gevonden oplossing.

Een tweede aanbeveling voor verder onderzoek bestaat uit het bekijken of een toevoeging van een opportuniteitskost aan het selectie criterium voor de D-P paren de prestaties van de invoegheuristiek significant verbetert. Deze opportuniteitskost kan naar analogie van Gronalt et al. (2003) gedefinieerd worden als het verschil in de waarde van het selectie criterium bij de keuze voor de beste combinatie en bij de keuze voor de tweede beste combinatie voor levering  $i$  of voor ophaling  $j$  (deze suggestie werd door mevrouw A. Caris reeds bij het opstellen van de invoegheuristiek gemaakt, maar werd in deze eindverhandeling niet gebruikt). De opportuniteitskost kan echter ook berekend worden als het verschil in de waarde van de tijdsbesparing of het verschil in de waarde van de wachttijd tussen levering en ophaling. Deze laatste mogelijke berekening houdt enkel rekening met één van de twee aspecten van het selectie criterium en niet met beide. Een derde mogelijke berekening van de opportuniteitskost houdt rekening met het verschil in transportkostenbesparing (zie ook volgende aanbeveling) tussen de beste en de tweede beste combinatie. Bij de gebruikte voorbeelden in dit hoofdstuk, is dit echter geen aparte mogelijkheid, maar wordt dit impliciet door het verschil in tijdsbesparing in rekening gebracht, aangezien de transportkosten afhankelijk zijn van de vervoertijden.

Een derde aanbeveling ligt in dezelfde lijn als de vorige, namelijk een onderzoek naar andere mogelijke aanvullingen op het selectie criterium. Eén dergelijke mogelijke aanvulling is om in het selectie criterium rekening te houden met de besparing in de transportkosten door de samenvoeging van een leveringspunt en een ophalingspunt in een gecombineerde rit. Zoals vermeld, is bij de in dit hoofdstuk gebruikte voorbeelden

reeds impliciet rekening gehouden met de transportkostenbesparing doordat de tijdsbesparing opgenomen werd in het selectie criterium. In het geval de transportkosten echter niet direct afhankelijk zijn van de vervoertijden, zou deze term een meerwaarde kunnen bieden. Indien de transportkosten voor alle vrachtwagens gelijk zijn, is de toevoeging van een transportkostenbesparing geen probleem. Het selectie criterium kan dan bijvoorbeeld zijn (waarbij  $CR_{0i}$  de transportkost van het depot naar leveringspunt  $i$  voorstelt,  $CR_{0j}$  de transportkost van ophalingspunt  $j$  naar het depot en  $CR_{ij}$  de transportkost van leveringspunt  $i$  naar ophalingspunt  $j$ ):

$$\begin{aligned} \text{Minimaliseer } & w_1 \cdot (L_j - E_i - s - t_{ij}) + w_2 \cdot (t_{ij} - t_{0i} - t_{j0}) \\ & + w_3 \cdot (CR_{0i} + CR_{j0} - CR_{ij}). \end{aligned}$$

Indien echter verschillende transportkosten mogelijk zijn naargelang de toewijzing aan een eigen of externe vrachtwagen, vormt de toevoeging van deze term een probleem, aangezien de toewijzingen van de gecombineerde ritten aan de vloot pas in de tweede fase gedaan worden. Een mogelijkheid is dan om de besparing in transportkosten te berekenen onder de veronderstelling dat alle ritten uitgevoerd worden door de goedkoopste vrachtwagen.

Een laatste aanbeveling voor verder onderzoek is het bekijken van het effect van de toevoeging van een derde fase. In deze derde fase kan gebruik gemaakt worden van de concepten 'single paired insertion' (SPI), 'swapping pairs between routes' (SBR) en/of 'within route insertion' (WRI) (zie ook hoofdstuk 3, punt 3.5.3.1) om te proberen de gevonden oplossing te verbeteren.

## Lijst der geraadpleegde werken

- Bräysy, O. and Gendreau, M. (2005a) 'Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part I: Route Construction and Local Search Algorithms', *Transportation Science*, 39:1, p. 104-118 (online) (cited 16 March 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=16386236&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Bräysy, O. and Gendreau, M. (2005b) 'Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part II: Metaheuristics', *Transportation Science*, 39:1, p. 119-139 (online) (cited 16 March 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=16386301&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Clarke, G. and Wright, J.W. (1964) 'Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points', *Operations Research*, 12:4, p. 568-581 (online) (cited 27 April 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=8733639&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Cordeau, J.; Gendreau, M.; Laporte, G.; Potvin, J. and Semet, F. (2002) 'A guide to vehicle routing heuristics', *Journal of the Operational Research Society*, 53:5, p. 512-522
- Dantzig, G.B. and Ramser, J.H. (1959) 'The truck dispatching problem', *Management Science*, 6:1, p. 80-91 (online) (cited 15 November 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=buh&AN=7459822&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>
- Desrochers, M.; Lenstra, J.K. and Savelsbergh, M.W.P. (1990) 'A classification scheme for vehicle routing and scheduling problems', *European Journal of Operational Research*, 46:3, p. 322-332
- Dethloff, J. (2001) 'Vehicle routing and reverse logistics: the vehicle routing problem with simultaneous delivery and pick-up', *OR-Spektrum*, 23:1, p. 79-96 (online) (cited 5 December 2005). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=c1h&AN=H417RXP8X8JXQ4U42BBH&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>



- Dumas, Y.; Desrosiers, J. and Soumis, F. (1991) 'The pickup and delivery problem with time windows', *European Journal of Operational Research*, 54:1, p. 7-22 (online) (cited 22 November 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=c1h&AN=8496080&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>
- Eilon, S.; Watson-Gandy, C.D.T. and Christofides, N. (1971) *Distribution management: mathematical modelling and practical analysis*, London, Griffin
- Eiselt, H.A.; Gendreau, M. and Laporte, G. (1995a) 'Arc routing problems, part I: the Chinese postman problem', *Operations Research*, 43:2, p. 231-242 (online) (cited 13 February 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=9508104754&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Eiselt, H.A.; Gendreau, M. and Laporte, G. (1995b) 'Arc routing problems, part II: the rural postman problem', *Operations Research*, 43:3, p. 399-414 (online) (cited 13 February 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=9507261541&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Fernández, E.; Meza, O.; Garfinkel, R. and Ortega, M. (2003) 'On the undirected rural postman problem: tight bounds based on a new formulation', *Operations Research*, 51:2, p. 281-291 (online) (cited 13 February 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=9436161&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Fisher, M.L. (1981) 'The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems', *Management Science*, 27:1
- Fleischmann, M.; Bloemhof-Ruwaard, J.M.; Dekker, R.; van der Laan, E.; van Nunen, J.A.E.E. and Van Wassenhove, L.N. (1997) 'Quantitative models for reverse logistics: A review', *European Journal of Operational Research*, 103:1, p. 1-17 (online) (cited 18 October 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=c1h&AN=RN035402287&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>
- Foulds, L.R. (1984) *Combinatorial Optimization for Undergraduates*, New York, Springer-Verlag

- Gendreau, M. and Potvin, J. (2005) 'Metaheuristics in Combinatorial Optimization', *Annals of Operations Research*, 140:1-4, p. 189-213 (online) (cited 3 August 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=c1h&an=19094787&loginpage=login.asp&site=ehost>>
- Ghiani, G. and Improta, G. (2000) 'An algorithm for the hierarchical Chinese postman problem', *Operations Research Letters*, 26:1, p. 27-32 (online) (cited 13 February 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=c1h&an=RN077544525&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Glover, F.; Taillard, E. and Taillard, E. (1993) 'A user's guide to tabu search', *Annals of Operations Research*, 41:1, p. 1-28 (online) (cited 20 November 2006). Available from <URL:<http://www.springerlink.com/content/k607q47112622n45/fulltext.pdf>>
- Golden, B.L. and Wasil, E.A. (1987) 'Computerized vehicle routing in the soft drink industry', *Operations Research*, 35:1, p. 6-17 (online) (cited 13 February 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=4478253&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Gronalt, M.; Hartl, R.F. and Reimann, M. (2003) 'New savings based algorithms for time constrained pickup and delivery of full truckloads', *European Journal of operational research*, 151:3, p. 520-535 (online) (cited 22 November 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=buh&AN=10743280&loginpage=login.asp&site=ehost-live>>
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2001) *Introduction to operations research* (7<sup>th</sup> edn), New York, McGraw-Hill
- Horngren, C.T.; Foster, G. and Datar, S.M. (2000) *Cost Accounting: A Managerial Emphasis* (10<sup>th</sup> edn), Upper Saddle River (New Jersey), Prentice Hall Inc.
- Imai, A.; Nishimura, E. and Current, J. (2007) 'A Lagrangian relaxation-based heuristic for the vehicle routing with full container load', *European Journal of Operational Research*, 176:1, p. 87-105 (online) (cited 23 March 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=c1h&AN=22582530&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>

- Kolen, A.W.J.; Rinnooy Kan, A.H.G. and Trienekens, H.W.J.M. (1987) 'Vehicle routing with time windows', *Operations Research*, 35:2, p. 266-273 (online) (cited 5 December 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=buh&AN=15255328&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>
- Laporte, G. and Nobert, Y. (1983) 'Generalized travelling salesman problem through n sets of nodes: an integer programming approach', *INFOR*, 21:1, p. 61-75 (online) (cited 16 December 2005). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=6287269&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Laporte, G. and Osman, I.H. (1995) 'Routing problems: A bibliography', *Annals of Operations Research*, 61:1, p. 227-262 (online) (cited 5 December 2005). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=bth&AN=18662728&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>
- Lawler, E.L. ; Lenstra, J.K.; Rinnooy Kan, A.H.G. and Shmoys, D.B. (1987) *The Traveling Salesman Problem*, Chichester, Wiley-Interscience
- Lenstra, J.K.; Rinnooy Kan, A.H.G. and Van Emde Boas, P. (1982) 'An appraisal of computational complexity for operations researchers', *European Journal of Operations Research*, 11:3, p. 201-210
- Lu, Q. and Dessouky, M.M. (2006) 'A new insertion-based construction heuristic for solving the pickup and delivery problem with time windows', *European Journal of Operational Research*, 175:2, p. 672-687 (online) (cited 21 November 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=buh&AN=22394050&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>
- Minieka, E. (1979) 'The Chinese postman problem for mixed networks', *Management Science*, 25:7, p. 643-648 (online) (cited 13 February 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=7347765&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Mitra, S. (2005) 'An algorithm for the generalized vehicle routing problem with backhauling', *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 22:2, p. 153-169 (online) (cited 20 September 2005). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=17648689&loginpage=Login.asp&site=ehost>>

- Nagy, G. and Salhi, S. (2005) 'Heuristic algorithms for single and multiple depot vehicle routing problems with pickups and deliveries', *European Journal of Operational Research*, 162:1, p. 126-141 (online) (cited 20 September 2005). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=15288182&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Nanry, W.P. and Barnes, J.W. (2000) 'Solving the pickup and delivery problem with time windows using reactive tabu search', *Transportation Research Part B: Methodological*, 34:2, p. 107-121 (online) (cited 22 November 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eoah&AN=W03R32LVE508WBB2NWXQ&loginpage=login.asp&site=ehost-live>>
- Papadimitriou, C.H. and Steiglitz, K. (1982) *Combinatorial optimization: algorithms and complexity*, Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall Inc.
- Pearn, W.L. and Liu, C.M. (1995) 'Algorithms for the Chinese postman problem on mixed networks', *Computers and Operations Research*, 22:5, p. 479-489 (online) (cited 23 October 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=c1h&AN=9507090057&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>
- Pearn, W.L. and Wu, T.C. (1995) 'Algorithms for the rural postman problem', *Computers and Operations Research*, 22:8, p. 819-828 (online) (cited 13 February 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=9508103686&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Rothe, J. (2005) *Complexity Theory and Cryptology: An Introduction to Cryptocomplexity*, Berlijn, Springer
- Ruland, K.S. and Rodin, E.Y. (1997) 'The Pickup and Delivery Problem: Faces and Branch-and-Cut Algorithm', *Computers and Mathematics with Applications*, 33:12, p. 1-13 (online) (cited 21 November 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=c1h&AN=RN028808410&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>
- Savelsbergh, M.W.P. and Sol, M. (1995) 'The General Pickup and Delivery Problem', *Transportation Science*, 29:1, p. 17-29 (online) (cited 20 September 2005).

Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=4454081&loginpage=Login.asp&site=ehost>>

- Solomon, M.M. (1987) 'Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints', *Operations Research*, 35:2, p. 254-265 (online) (cited 5 December 2006). Available from <URL:<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=buh&AN=15255268&loginpage=Login.asp&site=ehost-live>>
- Tang Montané, F.A. and Diéguez Galvão, R. (2006) 'A tabu search algorithm for the vehicle routing problem with simultaneous pick-up and delivery service', *Computers & Operations Research*, 33:3, p. 595-619 (online) (cited 20 September 2005). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=18206356&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- van Goor, A.R.; Ploos van Amstel, M.J. and Ploos van Amstel, W. (1999) *Fysieke distributie: denken in toegevoegde waarde* (4<sup>th</sup> edn), Houten, Uitgeverij Educatieve Partners Nederland BV
- Walshaw, C. (2002) 'A multilevel approach to the travelling salesman problem', *Operations research*, 50:5, p. 862-877 (online) (cited 16 December 2005). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=7466123&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Wang, H. and Wen, Y. (2002) 'Time-Constrained Chinese Postman Problems', *Computers and Mathematics with Applications*, 44:3/4, p. 375-387 (online) (cited 13 February 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=c1h&an=8595360&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Xu, H.; Chen, Z.; Rajagopal, S. and Arunapuram, S. (2003) 'Solving a Practical Pickup and Delivery Problem', *Transportation Science*, 37:3, p. 347-364 (online) (cited 16 March 2006). Available from <URL:<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=17685653&loginpage=Login.asp&site=ehost>>
- Zeng, L.; Ong, H.L. and Ng, K.M. (2005) 'An assignment-based local search method for solving vehicle routing problems', *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 22:1, p. 85-104 (online) (cited 20 September 2005). Available from

<URL: <http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=buh&an=16916333&loginpage=Login.asp&site=ehost>>

Websites:

- LINDO System's index page (2006) (online) (cited 6 April 2006). Available from <URL: <http://www.lindo.com>>

## Bijlagen

### Bijlage 1: Lijst der gebruikte figuren

Figuur 1: 'Single paired insertion' of SPI (Nanry en Barnes, 2000: p. 112) .....	- 43 -
Figuur 2: 'Swapping pairs between routes' of SBR (Nanry en Barnes, 2000: p. 113) ....	- 43 -
Figuur 3: 'Within route insertion' of WRI (Nanry en Barnes, 2000: p. 113) .....	- 44 -
Figuur 4: De combinatie van transportverzoeken $i$ en $j$ (Gronalt et al., 2003: p. 526)	- 47 -
Figuur 5: De combinatie van transportverzoeken $j$ en $k$ (Gronalt et al., 2003: p. 527)	- 48 -
Figuur 6: Combinatie leveringsrit en ophalingsrit (Imai et al., 2007: p. 89).....	- 57 -
Figuur 7: Illustratie van het begrip minimale wachttijd .....	- 88 -

### Bijlage 2: Lijst der gebruikte tabellen

Tabel 1: Gebruikte symbolen en definities in het wiskundig model van het VRPPD ....	- 36 -
Tabel 2: Gebruikte variabelen in het wiskundig model van het VRPPD .....	- 37 -
Tabel 3: Locatiegegevens (1 <sup>ste</sup> voorbeeld VRPFC).....	- 68 -
Tabel 4: Vervoertijden (1 <sup>ste</sup> voorbeeld VRPFC).....	- 69 -
Tabel 5: Transportkosten van een rit met eigen vrachtwagen (1 <sup>ste</sup> voorbeeld VRPFC) ..	- 69 -
Tabel 6: Vervoertijden (2 <sup>de</sup> voorbeeld VRPFC) .....	- 75 -
Tabel 7: Transportkosten van een rit met eigen vrachtwagen (2 <sup>de</sup> voorbeeld VRPFC)...	- 75 -
Tabel 8: Transportkosten van een rit met externe vrachtwagen (2 <sup>de</sup> voorbeeld VRPFC)	- 76 -
Tabel 9: $\lambda$ -waarden voor de eerste 10 iteraties van de 'subgradient optimization procedure' (2 <sup>de</sup> voorbeeld VRPFC) .....	- 80 -
Tabel 10: Transportkosten van een rit met eigen vrachtwagen (voorbeeld VRPFCTW) .	- 92 -
Tabel 11: Vervoertijden tussen het depot en de leverings-, resp. ophalingspunten (voorbeeld VRPFCTW) .....	- 93 -
Tabel 12: Vervoertijden tussen de leverings- en ophalingspunten onderling (voorbeeld VRPFCTW).....	- 93 -

Tabel 13: Som van de vervoertijden en de servicetijden per gecombineerde rit (voorbeeld VRPFCTW).....	- 93 -
Tabel 14: Tijdsvensters voor de leverings- en ophalingspunten (voorbeeld VRPFCTW)	- 94 -
Tabel 15: Wegingscoëfficiënten voor het selectie criterium (voorbeeld VRPFCTW) .....	- 94 -
Tabel 16: Test verenigbaarheid tijdsvensters van de leveringen en de ophalingen.....	- 95 -
Tabel 17: Test voor de wachttijden tussen de leveringen en de ophalingen.....	- 96 -
Tabel 18: Rangschikking van D-P paren volgens selectie criterium A.....	- 97 -
Tabel 19: Rangschikking van D-P paren volgens selectie criterium B.....	- 98 -
Tabel 20: Rangschikking van D-P paren volgens selectie criterium C .....	- 98 -
Tabel 21: D-P paren uit scenario A, gerangschikt volgens de laatst toelaatbare begintijden .....	- 100 -
Tabel 22: Bedieningstijden D-P paren uit scenario A en de som met de laatst toelaatbare begintijden .....	- 100 -
Tabel 23: D-P paren uit scenario C, gerangschikt volgens de laatst toelaatbare begintijden .....	- 103 -
Tabel 24: Bedieningstijden D-P paren uit scenario C en de som met de laatst toelaatbare begintijden .....	- 103 -



### **Bijlage 3: Classificatie van rondritplanningsproblemen of 'vehicle routing problems' van Desrochers et al. (1990)**

- Adressen
  - Aantal depots
    - Één
    - Aantal gegeven
  - Vraag
    - Locatie van de vraag ('nodes', 'edge', gemengd of TASK)
    - Type (ophalingen, leveringen of gemengd)
    - Aard van de vraag (deterministisch of stochastisch)
  - Tijdsaspecten
    - Geen tijdsbeperkingen
    - Vaste servicetijd
    - Tijdsvenster
    - Set tijdsvensters
  - Selectiebeperkingen
    - 1 plan
      - Alles bezocht
      - Subset moet bezocht, rest mag
      - Per subset moet minstens 1 bezocht
    - Meer plannen over een periode
- Voertuigen
  - Aantal
    - Constante
    - Variabele
  - Capaciteitsbeperkingen
    - Geen
    - Gelijke capaciteiten (homogene vloot)
    - Verschillende capaciteiten (heterogene vloot)

- Ladingsbeperkingen
  - Geen compartimenten
  - Veranderlijke compartimenten
  - Vast toegewezen compartimenten
- Planningsbeperkingen
  - Geen
  - Gelijke tijdsvensters voor alle voertuigen
  - Verschillende tijdsvensters
- Beperkingen van de routeduur
  - Geen
  - Gelijke grenzen
  - Verschillende grenzen
- Probleemkarakteristieken
  - Type netwerk
    - Eigenschappen netwerk
      - Gericht ('*directed*')
      - Niet-gericht ('*undirected*')
      - Gemengd
    - Reistijden
      - Voldoen aan de driehoeksongelijkheid
      - Voldoen niet aan de driehoeksongelijkheid
  - Type strategie
    - Wel of niet splitsen van de vraag
    - Wel of geen '*backhauling*' of '*full load routing*'
    - Wel of niet meerdere routes per voertuig
    - Wel of niet multi-depot routes
  - Adres-adres beperkingen
    - Wel of geen precedentierelaties
    - Wel of geen adres-depot beperkingen
    - Wel of geen adres-adres beperkingen

- Adres-voertuig beperkingen
  - Wel of geen depot-voertuig beperkingen
  - Wel of geen adres-voertuig beperkingen
- Voertuig-voertuig beperkingen
  - Geen voertuig-voertuig beperkingen
  - Synchronisatie nodig
- Doelfunctie
  - Wiskundige operator
    - Som
    - Maximum
  - Functie
    - Reis- en diensttijd of duurtijd
    - Voertuigkosten
    - Strafkosten voor voertuigen
    - Adreskosten
    - Strafkosten voor adressen
    - Gecombineerde functie

#### Bijlage 4: Wiskundige formulering van het cijfervoorbeeld van het VRPFCTW

$$\begin{aligned} \text{MIN } & 172 X_{121} + 172 X_{122} + 129 X_{141} + 129 X_{142} + 132 X_{161} + 132 X_{162} + 47 X_{181} + 47 \\ & X_{182} + 124 X_{1101} + 124 X_{1102} + 203 X_{321} + 203 X_{322} + 133 X_{341} + 133 X_{342} + 143 X_{361} \\ & + 143 X_{362} + 143 X_{381} + 143 X_{382} + 188 X_{3101} + 188 X_{3102} + 192 X_{521} + 192 X_{522} + \\ & 129 X_{541} + 129 X_{542} + 135 X_{561} + 135 X_{562} + 114 X_{581} + 114 X_{582} + 164 X_{5101} + 164 \\ & X_{5102} + 182 X_{721} + 182 X_{722} + 130 X_{741} + 130 X_{742} + 132 X_{761} + 132 X_{762} + 65 X_{781} + \\ & 65 X_{782} + 129 X_{7101} + 129 X_{7102} + 225 X_{921} + 225 X_{922} + 170 X_{941} + 170 X_{942} + 169 \\ & X_{961} + 169 X_{962} + 64 X_{981} + 64 X_{982} + 125 X_{9101} + 125 X_{9102} \end{aligned}$$

#### SUBJECT TO

$$\sum_i \sum_k X_{ijk} = 1 \quad \forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}; \text{ met } i \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ en } k \in \{1, 2\}$$

$$\sum_j \sum_k X_{ijk} = 1 \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}; \text{ met } j \in \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ en } k \in \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned} & 145 X_{121} + 113 X_{141} + 115 X_{161} + 51 X_{181} + 109 X_{1101} + 168 X_{321} + 116 X_{341} + 123 \\ & X_{361} + 123 X_{381} + 157 X_{3101} + 160 X_{521} + 113 X_{541} + 117 X_{561} + 101 X_{581} + 139 X_{5101} \\ & + 153 X_{721} + 114 X_{741} + 115 X_{761} + 64 X_{781} + 113 X_{7101} + 185 X_{921} + 143 X_{941} + 142 \\ & X_{961} + 64 X_{981} + 110 X_{9101} < 360 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 145 X_{122} + 113 X_{142} + 115 X_{162} + 51 X_{182} + 109 X_{1102} + 168 X_{322} + 116 X_{342} + 123 \\ & X_{362} + 123 X_{382} + 157 X_{3102} + 160 X_{522} + 113 X_{542} + 117 X_{562} + 101 X_{582} + 139 \\ & X_{5102} + 153 X_{722} + 114 X_{742} + 115 X_{762} + 64 X_{782} + 113 X_{7102} + 185 X_{922} + 143 X_{942} \\ & + 142 X_{962} + 64 X_{982} + 110 X_{9102} < 360 \end{aligned}$$

$$10 \leq B_1 \leq 100$$

$$50 \leq B_3 \leq 250$$

$$80 \leq B_5 \leq 180$$

$$50 \leq B_7 \leq 360$$

$$100 \leq B_9 \leq 300$$

$$0 \leq B_2 \leq 100$$

$$100 \leq B_4 \leq 280$$

$$200 \leq B_6 \leq 260$$

$$80 \leq B_8 \leq 320$$

$$5 \leq B_{10} \leq 80$$

$$B_2 \geq (B_1 + 8 + 57) - (100 + 8 + 57 - 0) \cdot (1 - X_{121} - X_{122})$$

$$B_4 \geq (B_1 + 8 + 40) - (100 + 8 + 40 - 100) \cdot (1 - X_{141} - X_{142})$$

$$B_6 \geq (B_1 + 8 + 41) - (100 + 8 + 41 - 200) \cdot (1 - X_{161} - X_{162})$$

$$B_8 \geq (B_1 + 8 + 14) - (100 + 8 + 14 - 80) \cdot (1 - X_{181} - X_{182})$$

$$B_{10} \geq (B_1 + 8 + 40) - (100 + 8 + 40 - 5) \cdot (1 - X_{1101} - X_{1102})$$

$$B_2 \geq (B_3 + 8 + 42) - (250 + 8 + 42 - 0) \cdot (1 - X_{321} - X_{322})$$

$$B_4 \geq (B_3 + 8 + 5) - (250 + 8 + 5 - 100) \cdot (1 - X_{341} - X_{342})$$

$$B_6 \geq (B_3 + 8 + 11) - (250 + 8 + 11 - 200) \cdot (1 - X_{361} - X_{362})$$

$$B_8 \geq (B_3 + 8 + 48) - (250 + 8 + 48 - 80) \cdot (1 - X_{381} - X_{382})$$

$$B_{10} \geq (B_3 + 8 + 50) - (250 + 8 + 50 - 5) \cdot (1 - X_{3101} - X_{3102})$$

$$B_2 \geq (B_5 + 8 + 45) - (180 + 8 + 45 - 0) \cdot (1 - X_{521} - X_{522})$$

$$B_4 \geq (B_5 + 8 + 13) - (180 + 8 + 13 - 100) \cdot (1 - X_{541} - X_{542})$$

$$B_6 \geq (B_5 + 8 + 16) - (180 + 8 + 16 - 200) \cdot (1 - X_{561} - X_{562})$$

$$B_8 \geq (B_5 + 8 + 37) - (180 + 8 + 37 - 80) \cdot (1 - X_{581} - X_{582})$$

$$B_{10} \geq (B_5 + 8 + 43) - (180 + 8 + 43 - 5) \cdot (1 - X_{5101} - X_{5102})$$

$$B_2 \geq (B_7 + 8 + 56) - (360 + 8 + 56 - 0) \cdot (1 - X_{721} - X_{722})$$

$$B_4 \geq (B_7 + 8 + 32) - (360 + 8 + 32 - 100) \cdot (1 - X_{741} - X_{742})$$

$$B_6 \geq (B_7 + 8 + 32) - (360 + 8 + 32 - 200) \cdot (1 - X_{761} - X_{762})$$

$$B_8 \geq (B_7 + 8 + 18) - (360 + 8 + 18 - 80) \cdot (1 - X_{781} - X_{782})$$

$$B_{10} \geq (B_7 + 8 + 35) - (360 + 8 + 35 - 5) \cdot (1 - X_{7101} - X_{7102})$$

$$B_2 \geq (B_9 + 8 + 82) - (300 + 8 + 82 - 0) \cdot (1 - X_{921} - X_{922})$$

$$B_4 \geq (B_9 + 8 + 55) - (300 + 8 + 55 - 100) \cdot (1 - X_{941} - X_{942})$$

$$B_6 \geq (B_9 + 8 + 53) - (300 + 8 + 53 - 200) \cdot (1 - X_{961} - X_{962})$$

$$B_8 \geq (B_9 + 8 + 12) - (300 + 8 + 12 - 80) \cdot (1 - X_{981} - X_{982})$$

$$B_{10} \geq (B_9 + 8 + 26) - (300 + 8 + 26 - 5) \cdot (1 - X_{9101} - X_{9102})$$

$$X_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}, \forall j \in \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ en } \forall k \in \{1, 2\}$$

## Auteursrechterlijke overeenkomst

*Opdat de Universiteit Hasselt uw eindverhandeling wereldwijd kan reproduceren, vertalen en distribueren is uw akkoord voor deze overeenkomst noodzakelijk. Gelieve de tijd te nemen om deze overeenkomst door te nemen, de gevraagde informatie in te vullen (en de overeenkomst te ondertekenen en af te geven).*

Ik/wij verlenen het wereldwijde auteursrecht voor de ingediende eindverhandeling:

### **Rittenplanning met gecombineerde ophaling en levering**

Richting: **Handelsingenieur**

Jaar: **2007**

in alle mogelijke mediaformaten, - bestaande en in de toekomst te ontwikkelen - , aan de Universiteit Hasselt.

Niet tegenstaand deze toekenning van het auteursrecht aan de Universiteit Hasselt behoud ik als auteur het recht om de eindverhandeling, - in zijn geheel of gedeeltelijk -, vrij te reproduceren, (her)publiceren of distribueren zonder de toelating te moeten verkrijgen van de Universiteit Hasselt.

Ik bevestig dat de eindverhandeling mijn origineel werk is, en dat ik het recht heb om de rechten te verlenen die in deze overeenkomst worden beschreven. Ik verklaar tevens dat de eindverhandeling, naar mijn weten, het auteursrecht van anderen niet overtreedt.

Ik verklaar tevens dat ik voor het materiaal in de eindverhandeling dat beschermd wordt door het auteursrecht, de nodige toelatingen heb verkregen zodat ik deze ook aan de Universiteit Hasselt kan overdragen en dat dit duidelijk in de tekst en inhoud van de eindverhandeling werd genotificeerd.

Universiteit Hasselt zal mij als auteur(s) van de eindverhandeling identificeren en zal geen wijzigingen aanbrengen aan de eindverhandeling, uitgezonderd deze toegelaten door deze overeenkomst.

Ik ga akkoord,

**Karen VAN GOMPEL**

Datum: **15.01.2007**