



UHASSELT

KNOWLEDGE IN ACTION

School voor Educatieve Studies

Educatieve master in de wetenschappen en technologie

Masterthesis

" $(a+b)^2 = ?$ " Een verkennende studie naar misconcepten rondom het merkwaardig product in het wiskundeonderwijs van het vijfde middelbaar

Yashin Ver Donck

Scriptie ingediend tot het behalen van de graad van Educatieve master in de wetenschappen en technologie, afstudeerrichting wetenschappen

PROMOTOR :

Prof. dr. Katrien STRUYVEN

COPROMOTOR :

Prof. dr. ir. Katrijn FREDERIX



UHASSELT

KNOWLEDGE IN ACTION

www.uhasselt.be
Universiteit Hasselt
Campus Hasselt:
Martelarenlaan 42 | 3500 Hasselt
Campus Diepenbeek:
Agoralaan Gebouw D | 3590 Diepenbeek

2023
2024



School voor Educatieve Studies

Educatieve master in de wetenschappen en technologie

Masterthesis

" $(a+b)^2 = ?$ " Een verkennende studie naar misconcepten rondom het merkwaardig product in het wiskundeonderwijs van het vijfde middelbaar

Yashin Ver Donck

Scriptie ingediend tot het behalen van de graad van Educatieve master in de wetenschappen en technologie, afstudeerrichting wetenschappen

PROMOTOR :

Prof. dr. Katrien STRUYVEN

COPROMOTOR :

Prof. dr. ir. Katrijn FREDERIX

Abstract

Merkwaardige producten, waaronder $(a + b)^2$, maken deel uit van de meeste leerplannen in het middelbaar wiskundeonderwijs. Dit onderwerp komt meestal voor de eerste keer aan bod in de eerste graad van het middelbaar onderwijs en wordt vanaf dan beschouwd als basiskennis. Helaas blijkt in de praktijk dat veel leerlingen in de derde graad nog fouten maken tegen de merkwaardige producten. Wanneer een leerling fouten systematisch maakt, zou het kunnen dat de leerling hierover een bepaalde misvatting of misconception heeft. Er zijn verschillende studies die verwijzen naar de vele fouten en misconcepten met betrekking tot de merkwaardige producten, maar hierin wordt nooit geduid welke misconcepten er dan bestaan, of er hierbij verschillen zijn tussen contexten en waarom studenten deze misconcepten ontwikkelen.

Deze studie beantwoordt deze vragen via semigestructureerde interviews bij dertien wiskundeleerkrachten en door een diagnostische test af te nemen bij 119 leerlingen uit de doorstroomfinaliteit van het vijfde middelbaar uit twee scholen. Hierbij ligt de focus op het merkwaardig product $(a \pm b)^2$.

Uit deze resultaten blijkt dat er vijf potentiële misconcepten voorkomen, waarvan drie bij meer dan één leerling. Zo wordt vaak foutief geschreven dat $(a + b)^2$ gelijk is aan $a^2 + b^2$, zorgt bij $(a - b)^2$ het minteken voor problemen en denken sommige leerlingen dat deze formules enkel geldig zijn voor de specifieke letters a en b . Voornamelijk in de klassen met minder dan zes uur wiskunde per week maken meerdere leerlingen systematisch dezelfde fouten en lijken daardoor deze misconcepten te hebben. Uit de interviews blijkt dat de manier waarop leerkrachten het merkwaardig product uitleggen aan hun leerlingen in sommige gevallen deze misconcepten in de hand zou kunnen werken. Hierbij wordt door leerkrachten te weinig gevarieerd in voorstellingsvormen. Ook blijkt dat er tussen de eerste graad en de derde graad weinig aandacht wordt besteed aan merkwaardige producten. Hierdoor zijn leerlingen niet voldoende getraind in het herkennen van merkwaardige producten en maken ook leerlingen zonder misconcepten hier regelmatig fouten tegen. De leerkrachten geven aan dat deze brug verkleind moet worden en onderwerpen meer moeten worden geïntegreerd zowel binnen een schooljaar als doorheen de verschillende jaren.

Deze studie geeft inzicht in de misconcepten rondom het merkwaardig product in het vijfde middelbaar. Door de beperkte omvang van deze studie beperken de resultaten zich tot het beschrijven van de huidige situatie. Mogelijke oplossingen konden niet worden getest. Maar gehoopt wordt dat deze verkennende studie een handvat kan bieden voor toekomstig onderzoek om zo tot een concrete oplossing te komen voor de moeilijkheden die studenten ervaren met het merkwaardig product.

Inhoudstafel

1	Literatuurstudie en probleemstelling	5
1.1	Wat is wiskunde.....	5
1.2	Misconcepten in de wiskunde.....	5
1.3	Misconcepten waarnemen	7
1.4	Oorzaken van misconcepten	7
1.5	Probleemstelling	8
1.6	Zoekplan	10
1.7	Inhoudelijke opbouw	10
2	Onderzoeksopzet en methoden.....	11
2.1	Fase 1: semigestructureerde interviews	11
2.2	Fase 2: diagnostische tests	13
3	Onderzoeksresultaten	15
3.1	Fase 1: semigestructureerde interviews	15
3.1.1	Welke fouten worden gemaakt?	15
3.1.2	Wie maakt deze fouten?	16
3.1.3	Hoe leg je het uit aan de leerling?	17
3.1.4	Waarom worden er zoveel fouten gemaakt?	19
3.2	Fase 2: diagnostische test.....	21
3.2.1	Vraag 1	21
3.2.2	Vraag 2	21
3.2.3	Vraag 3	22
4	Discussie en conclusie	23
4.1	Welke misconcepten hebben leerlingen	23
4.2	Verschillen tussen contexten	24
4.3	Oorzaak van de misconcepten	24
4.4	Conclusie	25
5	Literatuurlijst	27
6	Bijlagen.....	29
6.1	Interviewleidraad	29
6.2	Notitieblad	30
6.3	Binomium van Newton en de Driehoek van Pascal.....	31
6.4	Samenvattende tabel vraag 2 van diagnostische test.....	32
6.5	Creatief project.....	33

1 Literatuurstudie en probleemstelling

1.1 Wat is wiskunde

"Wat is wiskunde?" is volgens Devlin (2000) een vraag waar meer dan eens een antwoord op zal volgen zoals "wiskunde is de studie van getallen". Een antwoord waar velen zich allicht in kunnen vinden. Logisch ook, aangezien de meesten in de lagere school de eerste keer geïntroduceerd worden tot wiskunde in de vorm van rekenen. Ook later in de middelbare school, wanneer nieuwe, soms abstractere, concepten hun intrede doen, blijft de nadruk meestal liggen op het uitrekenen van oefeningen waarbij maar weinig aandacht wordt besteed aan de betekenis van de achterliggende concepten (Neidorf, Arora, Erberber, Tsokodayi & Mai, 2020; Sarwadi & Shahrill, 2014). Dat wiskunde zich ook bezighoudt met het beschrijven van bijvoorbeeld vormen (meetkunde) of het beschrijven van beweging (calculus) is volgens Devlin (2000) voor veel mensen geen essentieel kenmerk van het begrip "wiskunde". Devlin spreekt dan ook over een algemene misvatting of misconceptie van wat wiskunde nu eigenlijk is.

Maar wat is wiskunde dan wel? Voor iemand die zich verdiept heeft in de wiskunde, in tegenstelling tot degenen die enkel oppervlakkig met wiskunde in aanraking kwamen op de schoolbanken, kan het moeilijk zijn om hier een algemeen antwoord op te geven (Devlin, 2000). Doorheen de afgelopen eeuwen heeft wiskunde zich van in eerste instantie enkel de rekenkunde ontwikkeld naar een vakgebied dat is opgedeeld in verschillende takken. Van meetkunde over calculus tot algebra en analyse, de dag van vandaag bestaan er tussen de zestig en zeventig verschillende deelgebieden binnen de wiskunde (Devlin, 2000). Maar toch ziet Devlin (1998, via Drijvers, Streun & Zwaneveld, 2019) een verband tussen deze disciplines:

"Welk verschijnsel men ook wiskundig onderzoekt, de wiskundige aanpak blijft in grote mate toch steeds hetzelfde. Altijd begint men met vereenvoudigen, waardoor de kernbegrippen geïdentificeerd en geïsoleerd worden. Daarna worden de kernbegrippen steeds dieper geanalyseerd; de relevante patronen worden ontdekt en onderzocht. Men probeert de zaak te axiomatiseren. Het abstractieniveau neemt toe. Stellingen worden geformuleerd en bewezen."

Hierdoor kan wiskunde volgens Devlin (2000) algemeen beschreven worden als "de wetenschap van patronen". Hiermee maakt hij duidelijk dat wiskunde om veel meer gaat dan enkel het kunnen rekenen met getallen.

1.2 Misconcepten in de wiskunde

Misconcepten zijn de concepten of de denkkaders die personen gevormd hebben, maar die in strijd zijn met de algemeen aanvaarde denkkaders (Taylor, 1996). Ze worden ook wel preconcepten of naïeve overtuigingen genoemd aangezien ze vaak ontstaan vóór een persoon formeel geïntroduceerd is tot het concept (Kajander & Lovric, 2009). Dit komt omdat een mens voortdurend zijn persoonlijk denkkader uitbreidt en afstemt op zijn omgeving (Piaget, 1960). Vaak zal een persoon nog voor hij daadwerkelijk in een formele omgeving het concept zal krijgen aangereikt, reeds in contact zijn gekomen met het onderwerp en hier dus ook al een denkkader rond gevormd hebben op basis van bepaalde overtuigingen (Resnick, 1983; Taylor, 1996). Meestal zijn dit overtuigingen die in bepaalde contexten daadwerkelijk correct lijken te zijn. Het zal pas later in andere contexten zijn dat deze overtuigingen in strijd blijken te zijn met andere concepten, waardoor het duidelijk wordt dat de opvattingen niet kloppen (Booth & Koedinger, 2008). Op zich zou het hebben van misvattingen geen probleem zijn wanneer deze eenvoudig aangepast

zouden worden zodra er een tegenstrijdigheid wordt waargenomen. Het blijkt echter dat deze misvattingen eens ze gevormd zijn zeer hardnekkig zijn en moeilijk aangepast worden (Kajander & Lovric, 2009).

Het eerder genoemde misconception over wat wiskunde is illustreert dit. Aangezien kinderen van jongs af aan al in aanraking komen met cijfers en telproblemen, vaak nog voor ze daadwerkelijk naar school gaan, zal voor hen het concept wiskunde vorm krijgen vanuit deze ervaring. Wanneer ze in de lagere school, naast af en toe een oefening rond geometrie, vooral bezig zijn met rekenen en het oplossen van telproblemen zal dit misconception zich enkel maar versterken. Als later in de middelbare school de diepere inzichten over wiskunde worden aangeboden, blijkt het te laat om de definitie van wiskunde te herzien. Hierbij speelt mee dat veel leerkrachten de nadruk (door eigen misvattingen?) steeds bij het oplossen van telproblemen blijven leggen (Lim, 2011). Het daarnaast vaak kort aanreiken van achterliggende concepten en onderwerpen blijkt volgens Devlin (2000) dus niet genoeg om de misvatting dat wiskunde enkel rond de studie van getallen draait, bij te stellen.

Wanneer iemand ervan overtuigd is dat wiskunde simpelweg de studie is van getallen zal dit naïeve beeld waarschijnlijk geen gevolgen hebben. Maar het hebben van misconcepten zal in vele andere gevallen wel nadelig zijn (Jankvist & Niss, 2018; Sarwadi & Shahrill, 2014; Taylor, 1996). Zeker wanneer het bijvoorbeeld gaat om inhoudelijke misconcepten tijdens de wiskundeles. Kenmerkend aan wiskundeonderwijs is dat er steeds vanuit eenvoudige concepten vertrokken wordt, die zoals Devlin (2000) aangeeft vervolgens dieper en dieper worden uitgegraven en waarbij het abstractieniveau onvermijdelijk zal toenemen. Doordat in het wiskundeonderwijs steeds verder gebouwd wordt op eerder geïntroduceerde concepten zal het hebben van misconcepten, hoe klein ze aanvankelijk ook lijken, er uiteindelijk voor kunnen zorgen dat de doorheen de jaren gevormde denkkaders van studenten in strijd zijn met de nieuw aangereikte concepten (Sarwadi & Shahrill, 2014). Doordat het misconception tot op het moment dat dit voor een conflict zorgt wel gewoon de waarheid leek voor de student, zal het moeilijk zijn voor de student om zijn denkkader zomaar aan te passen. Hierdoor kan dit resulteren in het minder goed opnemen van de nieuwe leerstof (Kajander & Lovric, 2009; Taylor, 1996). Indien dit misconception overeind blijft en er niet wordt ingegrepen kan het bovendien zijn dat het denkkader van de leerling alsmaar minder volledig ontwikkeld wordt en uiteindelijk wiskundelessen een grote uitdaging blijken (Clement, Narode & Rosnick 1981; Bütüner & Filiz, 2017).

Een voorbeeld van een dergelijk misconception is de betekenis van een minteken (Booth & Koedinger, 2008; Bush & Karp, 2013). Aanvankelijk wordt het minteken geïntroduceerd als een operator binnen de verzameling van natuurlijke getallen. Wanneer later deze verzameling wordt uitgebreid naar de gehele getallen krijgt het minteken plots een dubbele betekenis, waarbij het niet enkel de vorm kan hebben van operator maar ook onderdeel van een getal kan zijn, wanneer het om een negatief getal gaat. Dit concept van een negatief getal blijkt voor veel studenten zeer abstract en moeilijk in te beelden, aangezien ze in het dagelijkse leven zo goed als niet met negatieve waarden in aanraking komen (Bush & Karp, 2013). Wanneer op dat moment een wiskundeleerling zijn concept van het minteken niet bijstelt, zou het kunnen dat dit misconception aanvankelijk geen tegenstrijdigheid veroorzaakt, maar later wel in de weg zal staan van nieuwe inzichten.

Zo zal een rekensom in de vorm $8 + (-7)$, waarbij een negatief getal wordt opgeteld bij een positief getal, correct om te vormen zijn naar de gelijkwaardige rekensom $8 - 7$, waarbij optelling van een negatief getal wordt veranderd naar de aftrekking van een

positief getal. Deze regel waarbij conceptueel de waarde van het tweede getal wordt aangepast en hierbij tegelijk ook de elementaire operatie wijzigt, kan door iemand met het genoemde misconception foutief geïnterpreteerd worden als een regel "wanneer optelling en aftrekken samenkomen wint de aftrekking", waarbij het misconception alleen maar bestendigd wordt. Het foutief proberen interpreteren en toepassen van regels wanneer een misconception voor conflict dreigt te zorgen, om zo het misconception te "herstellen", is volgens Perkins en Simmons (1988) een veelvoorkomende strategie bij studenten. Maar wanneer deze student later geconfronteerd zal worden met een vergelijking zoals $x^2 = 4$ zal deze hoogstwaarschijnlijk antwoorden dat enkel 2 een oplossing is van de vergelijking. Dat de negatieve waarde -2 ook een oplossing is van de vergelijking vereist immers een concept van het minteken dat deze student doorheen de jaren niet heeft gevormd. Het is dan ook pas op dit moment dat het misconception daadwerkelijk voor foute oplossingen zal zorgen.

1.3 Misconcepten waarnemen

Het is op dat moment de taak van de leerkracht om het misconception aan de basis van de gemaakte fout te herkennen en hier op in te grijpen. Al zal een interventie bij dergelijke diepgewortelde misconceptie meer moeite kosten dan wanneer dit meteen was bijgestuurd bij de vorming van het concept (Biemans & Simons, 1995; Vinner, 1981).

Dat een leerkracht aandachtig moet zijn voor misconcepten die aan de basis liggen van fouten betekent niet dat er ook daadwerkelijk achter iedere fout een conceptuele misvatting schuilgaat. Leerlingen maken bijvoorbeeld ook fouten ten gevolgen van verstrooidheid, onoplettendheid of het foutief gebruik van bepaalde procedures. Het is pas wanneer een bepaalde fout systematisch terugkomt en er een patroon duidelijk wordt in de gemaakte fouten dat een leerkracht gealarmeerd dient te worden en op zoek moet gaan naar een potentiële misconceptie (Khalid & Embong, 2019; Sarwadi & Shahrill, 2014). Volgens Fuchs en Menil (2008) is het belangrijk om hierbij individueel in gesprek te gaan met de leerlingen om zo inzicht te krijgen in het denkkader van de leerling en de misconceptie te herkennen.

Uit verschillende onderzoeken (Girit Yildiz, Osmanoglu & Gundogdu Alayli, 2022; Green, Piel & Flowers, 2008; Tanisli & Kose, 2013) blijkt echter dat het voor leerkrachten niet altijd eenvoudig is om deze misconcepten te achterhalen. Het vereist immers voor de leerkracht zelf een diepe contextuele kennis om in staat te zijn om potentiële misvattingen te herkennen. Helaas blijkt dat niet alle leerkrachten de leerstof zo goed beheersen dat ze hiertoe in staat zijn. Erger nog, Green, Piel en Flowers (2008) en Tanisli en Kose (2013) legden misconcepten bij leerkrachten bloot. Dit betekent niet alleen dat een leerkracht deze misconcepten zelf niet zal herkennen als fout, maar potentieel ook deze misconcepten zal introduceren bij zijn leerlingen.

1.4 Oorzaken van misconcepten

Een leerkracht die een concept foutief uitlegt is een mogelijk bron van misconcepten, maar daarnaast kan een leerkracht ook op andere manieren misconcepten veroorzaken.

Door de tijdsdruk die leerkrachten ervaren om hun leerdoelstellingen voor het einde van het academiejaar te behalen staan volgens Khalid en Embong (2019) leerkrachten te weinig stil bij de theoretisch achtergrond en wordt er vaak snel overgegaan naar het maken van oefeningen in de klassieke overtuiging dat veel oefenen het concept wel duidelijk zal maken. Dat hierbij studenten gewoon blind getallen en symbolen manipuleren zonder de achterliggende betekenis hiervan te begrijpen, wordt door leerkrachten weinig

bij stil gestaan (Bush & Karp, 2013). Vaak worden dan ook nog eens handige trucjes of ezelsbruggetjes meegedeeld zodat studenten de regels zeker niet vergeten, maar hierdoor zullen ze tegelijk nog minder redeneren vanuit een conceptueel kader (Bush & Karp, 2013; Lee & Boyadshiev, 2020). Wanneer studenten dan voor moeilijkere conceptuele vraagstukken worden geplaatst, blijkt dan ook vaak dat deze concepten niet voldoende of foutief zijn ontwikkeld en ze hiertoe niet in staat zijn (Bush & Karp, 2013).

Naast rechtstreekse invloed van leerkrachten onderzochten Bütüner en Filiz (2017) en Kajander en Lovric (2009) hoe handboeken misconcepten kunnen creëren en zelfs in stand kunnen houden. Bütüner en Filiz (2017) wezen erop dat om concepten te introduceren vaak het concept eerst zo eenvoudig mogelijk wordt voorgesteld om het vatbaar voor te stellen voor de studenten. Deze simplificatie werkt helaas vaak net misconcepten in de hand. Een voorbeeld wordt gegeven door Kajander en Lovric (2009) waarbij een raaklijn aan een grafiek in handboeken vaak wordt geïntroduceerd als een rechte die één punt gemeenschappelijk heeft met de grafiek, maar deze niet snijdt. Dit is in de nabije omgeving van dit punt inderdaad het geval, maar de raaklijn kan de grafiek wel snijden in een ander punt. Ook een situatie zoals bij de grafiek $f(x) = |x|$, waar in het punt (0,0) geen raaklijn bestaat, wordt hiermee over het hoofd gezien.

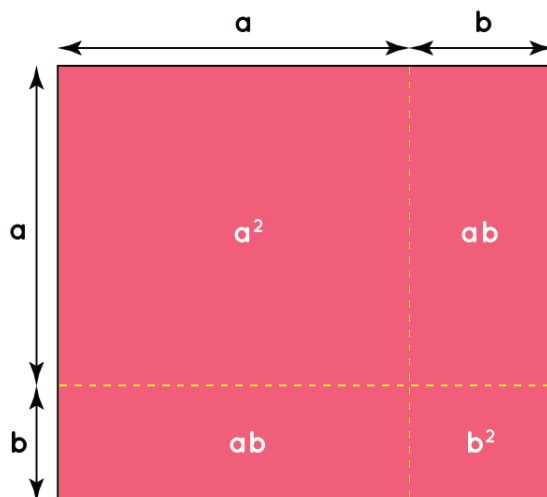
Niet alleen simplificatie in handboeken kan een misconceptie in de hand werken, ook een gebrek aan variatie kan een oorzaak zijn van misvattingen. Enerzijds wordt benadrukt door Drijvers, Streun en Zwaneveld (2019) dat het belangrijk is om zo veel mogelijk te variëren in voorstellingsvormen, zoals bij functies bijvoorbeeld in de vorm van grafieken, vergelijkingen, tabellen en pijlenvoorstellingen. Surma et al. (2019) wijzen erop dat het inderdaad essentieel is om woord te koppelen aan beeld aangezien visuele en verbale informatie op twee verschillende, maar elkaar aanvullende, manieren wordt geregistreerd door het werkgeheugen. Over het algemeen wordt dan ook meermaals gewezen op een gebrek aan visualisatie van abstracte concepten als oorzaak van misconcepten (Bush & Karp, 2013; Drijvers, Streun & Zwaneveld, 2019; Khalid & Embong, 2019; Özerem, 2012; Yetim & Alkan, 2013). Anderzijds is het ook binnen een bepaalde voorstellingsvorm belangrijk om voldoende te variëren. Zo stelden bijvoorbeeld Rafiah en Ekawati (2017) vast dat leerlingen in de lagere school moeite hadden met het herkennen van vierkanten en rechthoeken. Aangezien deze in hun handboek steeds afgebeeld stonden parallel met de randen van de pagina, werd een gekantelde rechthoek of vierkant vaak niet herkend.

1.5 Probleemstelling

Ergens rond 300 B.C. schreef Euclides in zijn tweede boek als vierde propositie het volgende (Coolidge, 1949; Heath, 1956):

"Als een rechte lijn willekeurig in twee wordt verdeeld, dan is het vierkant met als basis de gehele lijn, gelijk aan de som van de twee vierkanten met als basis de twee kleinere lijnsegmenten en tweemaal de rechthoek met de kleine lijnsegmenten als zijden."

Bovenstaande uitdrukking wordt visueel snel duidelijk (figuur 4) en laat zich in de huidige algebra vertalen als $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Sinds Euclides deze als eerste verwoordde, heeft deze formule voor heel wat frustraties gezorgd bij menig beginnend wiskundige. Dat de formule niet vanzelfsprekend is, blijkt uit ook de naam die er in het Nederlands aan wordt gegeven: een merkwaardig product.



Figuur 1: visuele weergave van het merkwaardig product $(a + b)^2$ door middel van het oppervlak van een vierkant (Cuemath, 2023)

Samen met $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ en $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ vormen dit de drie merkwaardige producten die reeds vanaf de eerste graad van het middelbaar onderwijs oorzaak zijn van verschillende rekenfouten.

De populairste fout onder leerlingen is het kwadraat van een tweeterm vereenvoudigen tot $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$. Deze fout wordt zelfs zo vaak gemaakt dat er onder wiskundigen een naam aan werd gegeven: "freshman's dream". De droom van vele wiskunde studenten om het merkwaardig product in deze, volgens Drijvers, Streun en Zwaneveld (2019) visueel aantrekkelijke en daarom verleidelijke vorm te schrijven lijkt dan ook een wijdverspreid misconcept.

Dat merkwaardige producten gepaard kunnen gaan met verschillende misconcepten wordt door velen vermeld (Drijvers, Streun & Zwaneveld, 2019; Easdown, 2009; McDonald, 2010; Pritchard & Grinfeld, 2010). Maar welke misconcepten er dan allemaal bestaan, waarom studenten deze misconcepten ontwikkelen en wat men kan doen om deze misconcepten tegen te gaan, wordt hierbij niet besproken.

Daarom zal deze studie zich hierop focussen. De centrale onderzoeksvraag van deze studie luidt dan ook als volgt:

"Hoe manifesteren misconcepten rondom het merkwaardig product $(a \pm b)^2$ zich in het eerste jaar van de derde graad middelbaar onderwijs?"

Concreet kan deze onderzoeksvraag opgedeeld worden in volgende deelvragen:

- 1) Welke misconcepten rondom het merkwaardig product $(a \pm b)^2$ hebben leerlingen in het eerste jaar van de derde graad middelbaar onderwijs?
- 2) Is er een verschil tussen leerlingen uit verschillende contexten?
- 3) Hoe komt het dat leerlingen deze misconcepten ontwikkelen?

Het merkwaardig product $(a - b)(a + b)$ wordt niet beschouwd in deze studie, aangezien hier veel minder fouten over worden gerapporteerd. De keuze om te focussen op de derde graad van het middelbaar onderwijs is in eerste instantie een keuze vanuit persoonlijk perspectief van de onderzoeker als toekomstig leerkracht in de derde graad. Maar daarnaast komt het grootste deel van de onderwerpen waarin het merkwaardig product naar voor komt, die in het middelbaar worden behandeld, aan bod in de derde graad. De

keuze om enkel te kijken naar het eerste leerjaar van de derde graad heeft te maken met de modernisering van het onderwijs die zich op het moment dat dit onderzoek plaatsvond, nog maar enkel in het eerste jaar heeft voorgedaan.

1.6 Zoekplan

Om tot bovenstaande literatuurstudie te komen werd literatuur geraadpleegd op volgende databanken: Web of Science, ERIC en Google Scholar. Hierbij werden aanvankelijk zoektermen gebruikt met betrekking tot het merkwaardig product zoals "freshman's dream", "binomial theorem", "perfect square" en "square of a sum" in combinatie met zoektermen zoals: "misconcept*", "mistakes", "common errors", "mathematics", "education", "secondary" en "algebra". Maar aangezien deze combinaties weinig tot geen literatuur opleverden waarin onderzoek met betrekking tot het merkwaardig product centraal stond, werden de eerste set van zoektermen achterwege gelaten, om tot een grotere dataset van bronnen te komen. Het ontbreken van onderzoek naar misconcepten rondom het merkwaardig product bevestigt overigens de relevantie van deze thesis.

Bovenop de literatuur die op deze manier geraadpleegd werd, is via het principe van het sneeuwbal effect nog meer literatuur geraadpleegd. Op deze manier werden meer dan zestig verschillende bronnen geselecteerd waarbij rekening gehouden werd met de kwaliteit van de bronnen. De samenvatting van de inzichten opgedaan in deze literatuurstudie werd hierboven gegeven. Hierin wordt niet verwezen naar al deze bronnen, aangezien deze niet allen even relevant bleken.

1.7 Inhoudelijke opbouw

In de volgende sectie "materiaal en methode" zal geschetst worden hoe dit onderzoek praktisch in zijn werk is gegaan en welke keuzes hierbij gemaakt zijn. Zo werd het onderzoek opgedeeld in twee fases, semigestructureerde interviews en diagnostische tests. Vervolgens zullen in de sectie "resultaten", de resultaten van deze twee fases afzonderlijk besproken worden. Om tot slot, in de sectie "discussie en conclusie", deze resultaten te bespreken en af te wegen tegen de literatuur. Hierbij zullen ook de beperkingen van dit onderzoek worden aangehaald en suggesties voor toekomstig onderzoek gedaan worden.

2 Onderzoeksopzet en methoden

Om te ontdekken welke misconcepten rondom het merkwaardig product (MP) leerlingen in het vijfde middelbaar hebben, of er een verschil is tussen verschillende contexten en hoe het komt dat leerlingen deze misconcepten ontwikkelen, werd het onderzoek opgedeeld in twee fases. In een eerste fase werden dertien verschillende wiskundeleerkrachten die actief zijn in het vijfde middelbaar geïnterviewd. Hierin werd gepolst naar hun ervaring met de moeilijkheden die leerlingen hebben met het MP om zo aan de hand van een kwalitatieve analyse antwoord te vinden op bovenstaande vragen. In een tweede fase werd een diagnostische test uitgevoerd in twee verschillende scholen waaraan in totaal 119 leerlingen van het vijfde middelbaar deelnamen. Hierbij werd geprobeerd om de moeilijkheden en gemaakte fouten niet alleen kwalitatief maar ook kwantitatief in beeld te brengen.

2.1 Fase 1: semigestructureerde interviews

Om een breed beeld te scheppen over de moeilijkheden die leerlingen hebben met het MP, maar ook om mogelijke pijnpunten bloot te leggen en misschien zelfs potentiële oplossingen aangereikt te krijgen, leek het essentieel om naar de inzichten van verschillende wiskundeleerkrachten te vragen. Hierbij werd als doel gesteld om minstens tien verschillende leerkrachten te interviewen en om leerkrachten te betrekken uit zoveel mogelijk verschillende contexten.

Hiervoor werd contact opgenomen met vier leerkrachten uit twee verschillende scholen (A en B) die de onderzoeker tijdens zijn stage hadden begeleid. Daarnaast werd ook één leerkracht uit een andere school (C) gecontacteerd die de onderzoeker persoonlijk kende. Via deze laatste leerkracht werden nog vier andere leerkrachten gecontacteerd, allen van dezelfde school (C). Tot slot werd een mail gestuurd naar leerkrachten die meewerken aan de wiskunde-zomerschool aan de UHasselt, hierop reageerden vier leerkrachten uit drie verschillende scholen (D, E, F).

Zo werd een totaal van dertien leerkrachten bekomen, actief in zes verschillende scholen uit drie onderwijskoepels: onderwijs van de Vlaamse Gemeenschap (GO!), Katholiek Onderwijs Vlaanderen (KOV) en Provinciaal Onderwijs Vlaanderen (POV). Twee scholen (B en D) zijn scholen met methodeonderwijs. Er werden leerkrachten geïnterviewd die lesgeven in zowel doorstroomfinaliteit, dubbele finaliteit en arbeidsmarktfinaliteit. Een overzicht van alle leerkrachten wordt weergegeven in tabel 1.

De interviews verliepen volgens het principe van een semigestructureerd interview. Hierbij werd een interviewleidraad gebruikt die werd toegevoegd in bijlage (zie bijlage 6.1). De interviews werden opgenomen en vervolgens uitgeschreven om zo te kunnen structureren volgens thema. Deze thema's worden besproken in sectie 3.1.

Tabel 1: overzicht van alle leerkrachten gerangschikt volgens finaliteit en volgorde waarin de leerkrachten werden geïnterviewd.

finaliteit	afkorting	#uren /klas	aan welke jaren	vooropleiding	#jaren ervaring	school	Onderwijs-koepel
Doorstroom	D1	3u, 4u, 6u, 8u	5, 6	Master wiskunde	31	A	KOV
	D2	3u,4u, 6u	5, 6	Doctoraat wiskunde	10	A	KOV
	D3	5u, 7u	4, 5, 6	Doctoraat fysica	5	B	GO! methode
	D4	7u	5	Industrieel ingenieur	3	C	GO!
	D5	4u, 6u, 8u	3, 4, 5, 6	Master wiskunde	36	D	GO!
	D6	3u, 6u	5, 6	Master fysica	15	A	KOV
Doorstroom en Dubbele of Arbeidsmarkt	DDA1	2u, 7u	5, 6	Doctoraat burgerlijk ingenieur	10	D	GO! methode
	DDA2	2u, 4u	5, 6	Handels-ingenieur	30	C	GO!
	DDA3	3u, 4u, 5u	4, 5, 6	Handels-ingenieur	12	E	KOV
	DDA4	2u, 7u	4, 5, 6	Industrieel ingenieur	5	C	GO!
	DDA5	2u, 3u, 4u, 5u, 6u	3, 4, 5, 6	Master wiskunde	8	F	POV
Dubbele of Arbeidsmarkt	DA1	2u, 3u	5, 6	Handels-ingenieur	31	E	KOV
	DA2	2u, 3u, 4u	3, 4, 5, 6	Industrieel ingenieur	20	C	GO!

2.2 Fase 2: diagnostische tests

In de tweede fase van deze verkennende studie werd een diagnostische test opgesteld waarmee getest werd welke courante fouten er daadwerkelijk door leerlingen gemaakt worden tegen het MP. Deze test werd afgenomen in twee scholen, A en B uit fase 1. Dit telkens in drie verschillende klassen uit de doorstroomfinaliteit. Er werd gekozen om deze testen binnen één finaliteit af te nemen om eenvoudiger verschillende klassen met elkaar te kunnen vergelijken. De keuze voor de doorstroomfinaliteit werd gemaakt omdat in sommige richtingen van de andere finaliteiten het MP geen deel meer uitmaakt van het leerplan, zoals bleek uit de interviews met leerkrachten (zie sectie 3.1). In totaal namen 119 leerlingen deel aan dit onderzoek. Een overzicht is weergegeven in tabel 2.

Tabel 2: overzicht van de deelnemende klassen. De letter in de naam van de klas staat voor de school en het cijfer voor het aantal uren wiskunde dat de leerlingen per week hebben.

klas	#leerlingen	klas	#leerlingen	
A8	25	B6	27	
A6	24	B4/5	10	
A4	22	B4	11	
Totaal A:	71	Totaal B:	48	Totaal: 119

Inhoudelijk werd de test opgesteld na de interviews met de leerkrachten, waardoor inzichten uit deze interviews konden worden geïmplementeerd in de test. De test werd opgesteld in vier delen. In een eerste deel werden enkele algemene vragen gesteld zoals hoeveel uren wiskunde de leerling dit jaar heeft en vorig jaar had, hoe leuk de leerling wiskunde vindt, hoe goed de leerling gemiddeld scoort en hoeveel de leerling hiervoor studeert. Vervolgens werd in ieder deel een wiskundige oefening gevraagd (zie tabel 3).

Het opzet bij de opbouw van de vragen was dat de leerlingen de test startten zonder te weten dat deze over het MP ging. Vervolgens werd geleidelijk aan meer letterlijk gevraagd naar het MP. Hiermee werd enerzijds geprobeerd om te testen of het MP spontaan herkend werd (vraag 1). Anderzijds kon zo ook worden getest of leerlingen het kwadraat van een tweeterm anders, en dus foutief, zouden uitwerken wanneer ze niet letterlijk verteld werden dat het om een MP ging (vraag 2) dan wanneer ze dit wel wisten (vraag 3), iets wat verschillende leerkrachten uit fase 1 hadden aangekaart. Helaas is dit opzet niet geslaagd doordat alle leerkrachten in school A hun klas voor de test verwittigden dat de test ging over het MP, ondanks dat hun werd gevraagd om dit niet te vermelden. Dat de leerkrachten uit school A dit vermelden en dit niet gebeurde in school B is toeval.

Verder werd vraag 2 zo opgebouwd dat in iedere sub-vraag een andere courante fout werd uitgelokt. In vraag a werd het MP $(a + b)^2$ bevraagd en in vraag b het MP $(a - b)^2$. Het minteken in vraag b werd door de leerkrachten in fase 1 benoemd als een struikelblok. Ook het voorkomen van een term waar een letter en een cijfer samen komen, zoals in vraag b, zou voor moeilijkheden kunnen zorgen. In vraag c werd een som van twee getallen gekwadraterd, waarbij de meest eenvoudige uitwerking bekomen wordt door de volgorde van bewerkingen toe te passen en dus eerst de som uit te werken alvorens te kwadrateren. Deze vraag werd gesteld omdat leerkrachten uit fase 1 hadden ervaren dat leerlingen hier vaak het MP (foutief) op proberen toe te passen.

Tabel 3: overzicht van de wiskundige oefening in delen 2 tem 4 van de diagnostische test.

Deel 2	
Vraag 1	Bepaal de nulwaarden van volgende functie: $f(x) = x^2 + 6x + 9$
Deel 3	
Vraag 2	Schrijf onderstaande functies in de vorm $ax^2 + bx + c$
a	$f(x) = (3 + x)^2 + (x + 1)^2$
b	$f(x) = (2 - 3x)^2$
c	$f(x) = x^2 + x(1 + 5)^2 + (2 + 3)^2$
Deel 4	
Vraag 3	Vul de formules van volgende merkwaardige producten aan:
a	$(a + b)(a - b) =$
b	$(a + b)^2 =$
c	$(a - b)^2 =$

De test werd in iedere klas afgenomen tijdens een lesuur wiskunde. Er werd bewust gekozen om de test beknopt te houden en maar enkele eenvoudige vragen te stellen, zodat de les hier niet te lang voor moest worden onderbroken. Er werd geprobeerd om de test telkens binnen maximaal 25 minuten af te ronden. Ook werd bewust geprobeerd om vragen te stellen die zowel in de klassen met 8 uur als in de klassen met 4 uur wiskunde opgelost kunnen worden.

Bij het afnemen van de test werd de leerlingen een notitieblad gegeven waarop een QR-code stond afgebeeld (zie bijlage 6.2). Door het scannen van deze QR-code, met gsm of tablet, kwamen de leerlingen terecht in een Google Form. Hierin werden de vragen gesteld en dienden de leerlingen hun antwoorden te geven. Eventuele tussenstappen of berekeningen konden fysiek worden genoteerd op het notitieblad. Door gebruik te maken van Google Forms werd telkens het antwoord van de leerling op de vragen binnen een onderdeel geregistreerd alvorens begonnen werd aan het volgende deel. Zo kon voorkomen worden dat leerlingen hun antwoorden uit voorgaande delen zouden aanpassen wanneer in het laatste deel "verklapt" werd dat de oefeningen over het MP gingen. Een ander voordeel van Google Form is dat alle antwoorden meteen gelinkt werden aan een Google Spreadsheet, wat de analyse achteraf eenvoudiger maakte. Door de leerlingen wel hun fysiek tussenstappen te laten noteren, kon nagekeken worden welke methoden leerlingen gebruikten om vragen te beantwoorden. Indien vragen foutief werden beantwoord kon zo ook worden nagekeken waar de fout zich net situeerde. Deze inzichten werden toegevoegd aan de spreadsheet om zo tot een algemeen overzicht te komen van de antwoorden, die vervolgens kon worden geanalyseerd. Resultaten van deze analyse worden weergegeven in sectie 3.2.

3 Onderzoeksresultaten

Eerst zullen de onderzoeksresultaten van de semigestructureerde interviews worden weergegeven, vervolgens worden de resultaten van de diagnostische tests besproken.

3.1 Fase 1: semigestructureerde interviews

Nadat alle gesprekken werden uitgeschreven, werden antwoorden geordend volgens thema. Deze thema's sluiten aan bij de onderzoeksvragen van dit onderzoek. Zo zal in dit onderdeel besproken worden welke fouten er worden gemaakt, om inzicht te krijgen in de mogelijke misconcepten die bestaan onder leerlingen. Vervolgens wordt besproken wie deze fouten maakt, om te kunnen kijken of hierbij verschillen zijn tussen contexten. Tot slot zal gezocht worden naar de oorzaak van mogelijke misconcepten door te kijken naar de manier waarop leerkrachten omgaan met deze gemaakte fouten en wat volgens de leerkrachten de reden is dat leerlingen zoveel fouten maken tegen het MP.

3.1.1 Welke fouten worden gemaakt?

De leerkrachten gaven aan dat er vier soorten fouten zijn die vaak worden gemaakt door leerlingen: fouten tegen het dubbelproduct, tegen het minteken, bij een som van getallen en wanneer er andere symbolen in het MP voorkomen.

Dubbelproduct

Voorbeeld: $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$

De fout waarbij het dubbelproduct ($2ab$) wordt vergeten en foutief de macht distributief wordt uitgewerkt ten opzichte van de optelling werd door iedere leerkracht aangehaald. Voor veel leerkrachten staat bovenstaande uitdrukking dan ook gelijk aan "de fout" tegen het MP.

Minteken

Voorbeeld: $(a - b)^2 \neq a^2 + 2ab - b^2$

Een andere moeilijkheid die leerkrachten aanhalen, is wanneer een aftrekking wordt gekwadrateerd. Het minteken zorgt hierbij voor verwarring bij veel leerlingen. In de meeste handboeken wordt het kwadraat van een verschil als een tweede MP beschouwd naast het kwadraat van een som. Onder andere D3 beschouwt dit echter als één enkel MP. Zo is het uiteraard mogelijk om $(a - b)^2$ correct te herschrijven als $(a + (-b))^2$ en vervolgens uit te werken als een kwadraat van een som: $(a + (-b))^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2$, om zo tot de correcte uitdrukking $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ te komen. De formule van het kwadraat van een aftrekking wordt in handboeken overigens ook op deze manier afgeleid.

De fout die volgens D3 door leerlingen vaak wordt gemaakt, is beide methoden door elkaar gebruiken. De correcte formule wordt dan wel gebruikt, maar hierin wordt b vervangen door $-b$, waardoor het minteken dubbel in rekening wordt gebracht en men de uitdrukking van het kwadraat van een som bekomt in plaats van een aftrekking. Dit ziet er dan als volgt uit: $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ook wordt hierbij volgens DDA5 en DA2 het kwadraat van een negatief getal vaak foutief berekend, leerlingen schrijven dan $(-b)^2 = -b^2$, waardoor men de uitdrukking bekomt die als voorbeeld gegeven werd.

Getallen

Voorbeeld: $(3 + 7)^2 \neq 3^2 + 7^2$

Verschillende leerkrachten, zoals D2 en DDA5, deden de vaststelling dat leerlingen het MP proberen toe te passen op een som of verschil van twee getallen. Buiten een gebrek aan efficiëntie – de volgorde van bewerkingen toepassen en eerst de som uitwerken voor te kwadrateren vereist minder rekenwerk – zou dit in principe geen problemen mogen opleveren aangezien zo de juiste oplossing bekomen wordt. Wat er echter wel misloopt is dat veel leerlingen het MP foutief toepassen op deze bewerking en eerder genoemde fouten maken waardoor ze alsnog een foute uitkomst bekomen.

Andere symbolen

Voorbeelden: $(c + d)^2$, $(2x + 1)^2$, $(\sin(x) + \cos(x))^2$

De formule van het MP wordt steeds geformuleerd met de algemene termen a en b. Wanneer in een oefening deze termen andere vormen aannemen zoals andere letters, combinaties van cijfers en letters of bijvoorbeeld goniometrische structuren, hebben leerlingen moeite om de gekende formule hierop toe te passen, melden onder andere DDA1, DDA3 en DA2. Volgens DDA1 hebben leerlingen niet altijd door dat de letters a en b voor een willekeurige wiskundige structuur staan, sommigen denken dan ook dat het MP een regel is die enkel geldt wanneer het om de specifieke letters a en b gaat.

3.1.2 Wie maakt deze fouten?

Na de interviews met de leerkrachten lijkt op bovenstaande vraag maar één juist antwoord: iedereen. Al zijn er verschillen.

Verschil tussen richtingen

Wat door bijna iedere leerkrachten wordt bevestigd is dat in de “sterkste” wiskundeklassen (deze met zes of acht uur wiskunde per week) ook fouten worden gemaakt tegen het MP, maar dat dit in deze klassen minder is dan in de wiskundig “zwakkere” klassen (deze met minder dan zes uur wiskunde per week). D5 verwoordt dit verschil als volgt: “Iedere leerling maakt ooit wel een fout tegen het MP, zelfs bij leerlingen die later de wiskundig zwaarste opleidingen gaan studeren op de universiteit. Het verschil is dat de leerlingen met minder wiskunde aanleg deze fout vaak systematisch maken.” Het systematisch maken van fouten zou bij deze leerlingen kunnen wijzen op potentiële misconcepten.

D1 vertelt dat leerlingen in de sterkere klassen allemaal de formule van het MP kennen maar hier soms fouten tegen maken wanneer dit moet worden toegepast. In zwakkere klassen zou volgens D1 zelfs de formule bij veel leerlingen niet gekend zijn. Dit wordt ook door de meeste leerkrachten bevestigd. DDA1 en DDA5 voegen hier aan toe dat ondanks dat er in de klassen met minder uren wiskunde er meer fouten gemaakt worden tegen het MP, hier relatief gezien wel meer tijd vrij gemaakt kan worden om stil te staan bij onderwerpen zoals het MP. In klassen met meer uren wiskunde wordt dit gezien als basiskennis en is de complexiteit van de wiskunde zo groot dat aan deze basiskennis minder aandacht kan worden besteed.

Volgens D5 is de grotere complexiteit van wiskunde in deze richtingen meteen de verklaring waarom zelfs de meest getalenteerde wiskundigen soms fouten maken tegen het MP. Zowel D5 als DA2 maken hierbij de analogie met een dt-fout, zo zal iemand tijdens een dictee nagenoeg geen dt-fouten schrijven omdat op dit moment alle aandacht gaat naar de correcte schrijfwijze van de woorden. Wanneer in een informele context vervolgens een mail getypt wordt, zullen hier waarschijnlijk vaker dt-fouten in verschijnen,

net omdat de focus dan niet meer ligt op het correct schrijven van de woorden, maar wel op de inhoud van de mail. De grote complexiteit van bepaalde oefeningen leidt daarom soms zelfs de sterkste leerlingen af van relatief eenvoudige basisregels zoals het MP, waardoor iedereen zich wel eens kan laten vangen en een fout kan maken tegen het MP.

Tot slot kan DA1 het verschil tussen de verschillende richtingen formeel bevestigen. In de DA-finaliteiten komen in de derde graad leerlingen samen die in de voorgaande jaren allemaal verschillende richtingen hebben gevolgd. Hierbij zou het opvallend zijn hoe leerlingen die uit sterkere wiskunde richtingen komen minder fouten maken tegen het MP.

Verskil tussen jaren

Meerdere leerkrachten merken ook een verschil op tussen de verschillende jaren. D2, D6 en DDA4 merken dat in het begin van het vijfde middelbaar leerlingen veel moeite hebben met het MP. Tegen het zesde middelbaar zouden leerlingen dit veel beter beheersen. Hun verklaring is dat het merkwaardig product in de eerste graad wordt aangeleerd maar dit vervolgens in de tweede graad nauwelijks moet worden toegepast, enkel bij het onderwerp van tweedegraadsvergelijkingen/ontbinden van factoren komt het MP in de tweede graad aan bod. Dit zou te weinig zijn om het MP als parate kennis te ontwikkelen. In het vijfde middelbaar zouden vervolgens een groot deel van de andere onderwerpen aan bod komen waarin het MP moet worden toegepast (zoals irrationale, complexe en goniometrische functies), waardoor tegen het zesde middelbaar het MP wel parate kennis is geworden.

Verskil tussen leerplannen

Door de modernisering van het onderwijs werd de voorbije jaren overgeschakeld van oude naar nieuwe leerplannen (tot en met het vijfde middelbaar), deze leerplannen zijn verschillend per richting en per onderwijskoepel, waardoor vergelijken moeilijk is. Toch zijn er enkele belangrijke vaststellingen.

D2 gaf het onderwerp ontbinden in factoren, waarbij het MP moet worden toegepast, vroeger in het derde middelbaar, maar moet dit nu doen in het vierde middelbaar en merkt hierbij dat dit in het vierde voor meer problemen zorgt. Net zoals bij het verschil tussen jaren, verklaart hij dit omdat de tijd sinds ze het MP leerden in de eerste graad langer is geworden.

DDA3 en DDA4 melden op hun beurt dat het onderwerp van ontbinden in factoren in hun leerplan van enkele DA-richtingen van het vierde middelbaar naar het vijfde middelbaar is verplaatst, waarbij opnieuw brug tussen leren en toepassing vergroot wordt.

DDA5 en DA2 stellen zelfs vast dat de onderwerpen waarin het MP moet worden toegepast volledig zijn geschrapt uit de leerplannen van verschillende DA-richtingen. In deze richtingen zou het MP dus geen deel meer uitmaken van de leerplannen nadat het MP werd aangeleerd in de eerste graad.

3.1.3 Hoe leg je het uit aan de leerling?

Er werd aan de leerkrachten gevraagd hoe zij aan een leerling het MP zouden toelichten indien blijkt dat een leerling hier fouten tegen maakt. Hierop werden verschillende antwoorden gegeven.

Formule op het bord

Acht leerkrachten antwoorden dat zij in dat geval de formule van het MP op het bord noteren en vervolgens in de oefening waar de fout werd gemaakt, al dan niet met kleur, aanduiden hoe deze formule toegepast moet worden.

Distributief uitwerken

Een andere populaire methode die zes leerkrachten aanhalen is om het kwadraat van een tweeterm te herschrijven als een product van twee tweetermen: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. In deze vorm kan de distributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling worden toegepast, wat voor sommige leerlingen een logischere uitwerking is dan rechtstreeks de formule toe te passen.

Getallen invullen

Vervolgens zijn er ook vier leerkrachten die wanneer een leerling een foute formule toepast, zoals wanneer bijvoorbeeld het dubbelproduct vergeten wordt, hierbij een rekenvoorbeeld geven met getallen om aan te tonen dat de gebruikte formule foutief is. Zo tonen ze bijvoorbeeld aan dat $36 = 6^2 = (5 + 1)^2$ niet gelijk is aan $5^2 + 1^2 = 25 + 1 = 26$.

Formularium

Een vijftal leerkrachten staan het gebruik van een formularium toe op testen en examens. Wanneer leerlingen alsnog fouten maken tegen het MP, verwijzen deze leerkrachten naar dit formularium waarop de correcte formule staat weergegeven. Toch zijn er ook vier leerkrachten die absoluut geen voorstander zijn van een formularium, enerzijds vinden D4 en DDA1 dat de formule van het MP vanbuiten gekend moet zijn om vlot oefeningen op te kunnen lossen, anderzijds vinden D3 en D6 dat het gebruik van een formularium de leerlingen te weinig inzicht geeft in de formules.

Driehoek van Pascal

Een andere methode, die drie leerkrachten toepassen, is verwijzen naar de Driehoek van Pascal. Dit is een constructie die normaal enkel bij de klassen met meer dan zes uur wiskunde aan bod komt. Dit gebeurt dan op het einde van het zesde middelbaar in de context van kansrekenen wanneer het gaat over het Binomium van Newton. Voor meer uitleg over de Driehoek van Pascal wordt verwezen naar bijlage 6.3.

Via de Driehoek van Pascal kan in de context van het MP eenvoudig worden afgeleid dat de tweede macht van een tweeterm zal resulteren in een drieterm waarvan de tweede term zal worden vermenigvuldigd met 2. D3, D6 en DDA1 leggen de Driehoek van Pascal dan ook al vroeger dan het zesde middelbaar uit, zonder hierbij in detail te treden over het Binomium van Newton. Zij zien hierin een eenvoudig hulpmiddel dat de leerlingen kan helpen om de formule van het MP op te stellen en ervoor zorgt dat een formularium overbodig is. Bovendien is het hiermee ook mogelijk om hogere machten van een tweeterm uit te werken. Iets wat in sommige, vooral oude, leerplannen ook verwacht wordt, maar door leerkrachten meestal wordt aangeleerd doormiddel van het vanbuiten leren van bijhorende formules.

Vierkant

Drie leerkrachten, D1, D3 en DDA5, verwijzen soms naar de visuele weergave van het MP aan de hand van een vierkant (zie figuur 4). Zes van de dertien leerkrachten bleken deze visualisatie nog nooit te hebben gezien. Wanneer werd gevraagd wat de leerkrachten van het gebruik van deze visualisatie als extra uitleg voor leerlingen zouden denken, bleek wel dat nagenoeg iedereen dit als een mogelijke meerwaarde zag. Zo zei D4 hierover het volgende: "Het zal afhangen van de leerling of dit helpt. Er zijn kinderen die visueel heel geholpen zijn, maar anderen helemaal niet. Het is de moeite om het maar te proberen. Als leerkracht moet je zo veel mogelijk manieren gebruiken om iets uit te leggen. Het is dan aan de leerling om te kijken welke methode het hardste helpt voor hem/haar."

Omgekeerd bleken drie leerkrachten helemaal geen fan van de visualisatie met het vierkant. Zo zou de materie volgens DDA1 enkel abstracter worden voor de leerlingen wanneer verwezen wordt naar het vierkant en is het beter om gewoon de formule vanbuiten te leren. Een mening die D2 en DA1 deelden.

Andere methoden

Eén leerkracht past een ezelsbruggetje toe. Zo zou D1 soms al grappend zeggen dat “wanneer je met twee bent en je wilt vermenigvuldigen, je de gevolgen moet dragen”, doelend op de derde term of dubbelproduct dat vaak vergeten wordt.

DDA2 schrijft dan weer steeds in het groot de afkorting “MP” op het bord, wanneer een fout wordt gemaakt tegen het MP, maar benoemt deze afkorting dan al lachend als “militaire politie” om vervolgens toe te voegen dat de militaire politie gebeld zal worden wanneer er nog fouten tegen het MP gemaakt worden. Eenzelfde associatie met het merkwaardig product wordt gemaakt door D5, die al lachend dreigt om aan de oren te komen trekken wanneer er fouten gemaakt worden tegen het merkwaardig product. Door het “aan de oren trekken” of “militaire politie” enkel te gebruiken in de context van het merkwaardig product hopen D5 en DDA2 zo een soort conditionering te creëren waarbij leerlingen extra aandachtig zijn voor het MP. Tijdens het maken van oefeningen kan zo de hele klas hierop attent gemaakt worden zonder letterlijk naar het merkwaardig product te verwijzen.

3.1.4 Waarom worden er zoveel fouten gemaakt?

In voorgaande sectie werden manieren besproken waarop leerkrachten binnen hun les leerlingen die fouten maken tegen het MP kunnen verder helpen. Maar hoe komt het nu dat zoveel leerlingen nog steeds moeite hebben met een basisvaardigheid die reeds in de eerste graad werd aangeleerd? Antwoorden op deze vraag kunnen worden opgedeeld in volgende twee thema's: “de brug tussen leren en toepassen” en “rekenvaardigheden”.

De brug tussen leren en toepassen

Zoals eerder werd vastgesteld is er een grote brug tussen het moment waarop het MP voor het eerst wordt aangeleerd (eerste graad) en het moment waarop dit dient toegepast te worden in een context (einde tweede graad en derde graad). Dit zorgt er volgens de leerkrachten op verschillende manieren voor dat leerlingen moeilijkheden ervaren met het MP.

Doordat aanvankelijk het MP wordt aangeleerd als een los onderwerp, zonder dat dit wordt gekoppeld aan bepaalde toepassingen of contexten, missen leerlingen volgens D4 het nut van het MP. D3, D5 en DDA1 wijzen er dan ook op dat in de eerste graad de formules van het MP gewoon vanbuiten wordt gestudeerd zonder dat leerlingen echt beseffen waarvoor de formules eigenlijk staat en waarvoor deze gebruikt dient te worden. Op dit moment is de enige motivatie van de leerlingen om het MP te kennen het slagen voor het examen volgens D4. Dat later in de hogere graden het MP zal terugkeren en het dus belangrijk is om deze goed te kennen wordt volgens D4 te weinig duidelijk gemaakt.

Dat onderwerpen los van elkaar gegeven worden is dan ook een van de oorzaken waarom leerlingen moeilijkheden ervaren met wiskunde in het algemeen en het MP in het bijzonder volgens DDA1. Ook D2 haalt aan dat zodra een onderwerp is afgerond deze inhouden doorheen het schooljaar vervolgens te weinig herhaald worden en dus niet worden geïntegreerd in de daaropvolgende hoofdstukken. DDA4 illustreert dit aan de hand van het handboek dat gebruikt wordt in school c. In dit handboek wordt ieder onderwerp niet alleen in een afzonderlijk hoofdstuk behandeld, maar worden de hoofdstukken ook fysiek

van elkaar gescheiden doordat het handboek voor ieder onderwerp een andere bundel heeft. Zodra een onderwerp is afgerond mogen de leerlingen bijhorende bundel dan ook gewoon thuislaten.

Niet alleen binnen een bepaald jaar, maar ook over de jaren heen worden onderwerpen te weinig geïntegreerd volgens DDA3. Hierdoor vallen er volgens DDA5 dan ook gaten in de leerstof. Karakteristiek voor het vak wiskunde is dat er vanuit eenvoudige principes steeds wordt verder gebouwd en de complexiteit stapsgewijs wordt verhoogd. Maar doordat deze eenvoudige principes over de jaren heen niet herhaald worden, zijn leerlingen deze vaak vergeten voordat er uiteindelijk op verder gebouwd kan worden. Exact dit is wat er volgens DDA5 en DDA4 gebeurt met het MP. Een extra struikelblok in de integratie van leerstof over de jaren heen, is de samenwerking tussen verschillende leerkrachten. Zowel D1, DDA3 als DDA5 geven aan dat het in veel scholen moeilijk is om hierover afspraken te maken over de verschillende graden heen, aangezien veel scholen werken met vakgroepen per graad.

Rekenvaardigheden

Verschillende leerkrachten wijzen erop dat leerlingen over het algemeen veel fouten maken tegen basis rekenvaardigheden, niet alleen tegen het MP. Zowel DDA5 als DA2 ervaren dat in de nieuwe leerplannen minder ruimte is voorzien voor algebra, waarin rekenvaardigheden worden getraind. D5 wijst erop dat deze evolutie al heel lang bezig is en doorheen de afgelopen 30 jaar het onderwijs veel grafischer is geworden door digitalisering. Vroeger moesten oefeningen bijna uitsluitend algebraïsche uitgewerkt worden, terwijl dit tegenwoordig vaak grafisch kan en mag worden opgelost doormiddel van computerprogramma's zoals Geogebra. Ook is het rekentoestel een veel centralere rol gaan innemen in het klaslokaal volgens DDA1, waardoor leerlingen ook niet meer getraind worden in basisvaardigheden. Volgens D2 en D3 wordt er dan ook te weinig tijd voorzien in het klaslokaal om via oefeningen automatismen te creëren in deze basisvaardigheden.

Oplossing

De oplossing voor bovenstaande thema's is voor de meeste leerkrachten voor de hand liggend: de brug tussen leren en toepassen verkleinen, onderwerpen integreren zowel binnen een bepaald schooljaar als over de jaren heen en meer oefenen. Een voorbeeld over hoe dit in de praktijk gebracht zou kunnen worden, werd gegeven door DDA5. In school f werd namelijk, mede dankzij DDA5, een systeem uitgewerkt waarin doorheen de jaren de basisrekenvaardigheden zoals het MP constant worden herhaald. Op deze school wordt namelijk in het derde middelbaar een bundel opgebouwd waarin alle basisrekenvaardigheden samengevat staan die de leerlingen tot dan zagen. Deze bundel wordt in de daaropvolgende jaren steeds aangevuld met nieuwe leerstof. Vervolgens wordt vanaf het derde middelbaar tweemaal per jaar een grootschalige test afgenomen bij alle leerlingen met vragen over de leerstof in deze bundel. De leerlingen moeten zo minstens ieder halfjaar alle basisleerstof herhalen om te slagen op deze testen. DDA5 merkt dat het invoeren van deze leerstofbundel en bijhorende testen het basisniveau van verschillende leerlingen heeft opgekrikt en dat er veel minder fouten gemaakt worden tegen het MP. Ook de meeste andere leerkrachten geven aan in te zetten op voorkennis, waarbij dit in het begin van het schooljaar of in het begin van een hoofdstuk kort herhaald wordt, maar geen van deze leerkrachten vermelden een soortgelijk systeem waarbij over de verschillende jaren heen wordt samengewerkt.

3.2 Fase 2: diagnostische test

Een overzicht van de resultaten op de diagnostische test wordt weergegeven in tabel 4 en tabel 5. Hierin valt op hoe de klassen met meer uren wiskunde per week gemiddeld hoger scoren dan de klassen met minder uren wiskunde per week. Zo haalde klas A8, met acht uur wiskunde per week, gemiddeld een score van 97% per vraag. Terwijl in klas B4, met vier uur wiskunde per week, maar gemiddeld 20% van de leerlingen een vraag juist wist te beantwoorden. Daarnaast scoorde school A gemiddeld hoger dan school B.

Tabel 4: percentage juiste antwoorden per klas en per vraag met bijhorend gemiddelde (in het rood) en standaardafwijking (in het blauw). De klassen werden gerangschikt in volgorde van behaalde resultaat, waarbij de klassen uit school A werden gemarkeerd in het grijs.

		Vraag 1	vraag 2a	vraag 2b	vraag 2c	vraag 3a	vraag 3b	vraag 3c		
A8	25IIn	96%	96%	96%	96%	96%	100%	100%	97%	2%
A6	24IIn	100%	71%	75%	88%	54%	83%	92%	80%	14%
B6	27IIn	81%	85%	70%	74%	52%	93%	74%	76%	12%
A4	22IIn	36%	32%	23%	27%	59%	73%	55%	44%	17%
B4/5	10IIn	90%	10%	10%	10%	70%	20%	20%	33%	31%
B4	11IIn	73%	0%	0%	0%	36%	18%	18%	21%	25%
		79%	49%	46%	49%	61%	64%	60%		
		21%	37%	36%	38%	18%	33%	32%		

Tabel 5: percentage juiste antwoorden per school en per vraag en bijhorend gemiddelde (in het rood) en standaardafwijking (in het blauw). School A aangeduid in het grijs zoals in tabel 4.

		Vraag 1	Vraag 2a	Vraag 2b	Vraag 2c	Vraag 3a	Vraag 3b	Vraag 3c		
totaal A	71IIn	79%	68%	66%	72%	70%	86%	83%	75%	7%
totaal B	48IIn	81%	50%	42%	44%	52%	60%	50%	54%	12%
totaal	119IIn	80%	61%	56%	61%	63%	76%	70%	67%	8%

3.2.1 Vraag 1

Vraag 1 (bereken de nulwaarden van volgende functie: $f(x) = x^2 + 6x + 9$) werd gesteld om na te gaan hoeveel leerlingen het MP hierin herkennen. In school B herkende geen enkele leerling het merkwaardig product. In school A werd het MP wel herkend, maar werden de leerlingen ook gewaarschuwd. Hier herkende in de klas met acht uur wiskunde 48% van de leerlingen het MP, in de klas met zes uur wiskunde was dit 8% en in de klas met vier uur wiskunde niemand. In het totaal herkenden zo maar veertien van de 119 leerlingen het MP.

3.2.2 Vraag 2

Bij vraag 2 (schrijf onderstaande functies in de vorm $ax^2 + bx + c$) werd geanalyseerd welke fouten de leerlingen maken, voor een samenvattende tabel wordt verwezen naar bijlage 6.3.

Vraag 2a ($f(x) = (3 + x)^2 + (x + 1)^2$) werd door 47 leerlingen fout beantwoord, waarvan vier leerlingen de vraag open lieten. Bij de helft van deze foute antwoorden werd het dubbelproduct vergeten. De overige negentien fouten werden niet apart beschouwd omdat

hiervan geen enkele fout door meer dan vijf leerlingen werd gemaakt. Ook in volgende vragen worden enkel fouten afzonderlijk besproken die door meer dan vijf leerlingen werden gemaakt.

Vraag 2b ($f(x) = (2 - 3x)^2$) was duidelijk de moeilijkste vraag, waarbij 65 fouten werden gemaakt door 52 leerlingen, hiervan lieten zeven leerlingen de vraag open. Sommige leerlingen maakten dus combinaties van meerdere fouten. Opnieuw is de meest gemaakte fout het vergeten van het dubbelproduct (23 keer). Verder maakten zestien leerlingen een fout tegen het minteken en negen leerlingen hadden moeite met de term waarbij een cijfer en een letter samen voorkwamen. Ook werden nog tien andere fouten gemaakt.

Vraag 2c ($f(x) = x^2 + x(1 + 5)^2 + (2 + 3)^2$) werd door 64 leerlingen (59%) opgelost doormiddel van het MP. Van deze 64 leerlingen pasten 29 het MP foutief toe, twintig leerlingen vergaten hierbij het dubbelproduct. Verder werd de vraag elf keer open gelaten en maakten zeven leerlingen een rekenfout zonder dat ze de oefening oplosten doormiddel van het MP.

Er waren 24 leerlingen die bij iedere deelvraag, wanneer ze een antwoord invulden, steeds het dubbelproduct vergaten. De verdeling van deze leerlingen wordt weergegeven in tabel 6. Hierbij valt op hoe het dubbelproduct vooral in de klassen met minder uren wiskunde per week door veel leerlingen consistent vergeten wordt.

Ook waren er twee leerlingen die bij iedere deelvraag eenzelfde fout maakten. In VJC6 antwoordde een leerling telkens met een negatief dubbelproduct, in VJC4 schreef een leerling telkens een enkel product.

3.2.3 Vraag 3

Vraag 3 (vul de formules van de merkwaardige producten aan) werd beter beantwoord dan vraag 2. Zo gaven acht van de 24 leerlingen die in vraag 2 telkens het dubbelproduct vergaten wel de correcte formule in vraag 3. Ook corrigeerden vijf van de zestien leerlingen die bij vraag 2b een fout maakten tegen het minteken zich bij vraag 3b. De twee leerlingen die in vraag 2 telkens dezelfde fout maakten, maakten deze fout helaas ook bij vraag 3.

Tabel 6: vergelijking tussen vraag 2 en vraag 3 met betrekking tot het consistent vergeten van het dubbelproduct ($2ab$) in vraag 2.

Vraag 2 vs 3	Klas (aantal leerlingen)	VJC8 (25)	VJC6 (24)	VVX6 (27)	VJC4 (22)	VVX4/5 (10)	VVX4 (11)	Totaal (119)
	altijd 2ab vraag 2		1	2	6	6	9	24
	toch correct vraag 3		1	0	3	2	2	8
	% toch correct		100%	0%	50%	33%	22%	33%

4 Discussie en conclusie

In dit onderzoek werd nagegaan hoe misconcepten rondom het merkwaardig product zich manifesteren in het vijfde middelbaar. Hierbij werd onderzocht welke misconcepten leerlingen hebben, of er verschillen zijn tussen contexten en wat de oorzaak van deze misconcepten zou kunnen zijn. Conclusies, beperkingen van dit onderzoek en suggesties voor toekomstig onderzoek zullen per deelvraag besproken worden.

4.1 Welke misconcepten hebben leerlingen

Uit de gesprekken met de leerkrachten bleek dat er vier categorieën van fouten zijn die regelmatig worden gemaakt tegen het MP (het dubbelproduct, andere symbolen, het minteken en getallen). De diagnostische test bevestigde ook dat veel leerlingen deze fouten maken. Maar zijn deze fouten allen het gevolg van een misconception? Zoals werd besproken in de literatuurstudie zijn enkel de fouten die systematisch door een leerling worden gemaakt indicaties van misconcepten (Khalid & Embong, 2019; Sarwadi & Shahrill, 2014).

Het dubbelproduct werd door een groot aantal leerlingen vergeten wanneer het MP toegepast diende te worden in een oefening, deze fout lijkt dan ook potentieel een gevolg te zijn van een eerste misconception. Maar wanneer vervolgens letterlijk naar de formule werd gevraagd vulden alsnog twee derde van deze leerlingen de correcte formule in, inclusief dubbelproduct. Dat leerlingen vaker fouten maken wanneer het MP moet worden toegepast in een bepaalde context dan wanneer hier letterlijk naar wordt gevraagd, werd door verschillende leerkrachten aangehaald. Leerkrachten vertelden hierbij dat sommige leerlingen foutief denken dat het MP enkel geldt wanneer het om de specifieke letters a en b gaat, wat een tweede misconception lijkt te zijn en een verklaring geeft voor de leerlingen die alsnog een juiste formule gaven. Een soortgelijke misvatting zou ook de fouten die gemaakt werden bij de gecombineerde cijfer/letter term kunnen verklaren. De combinatie van een cijfer en een letter werd echter maar éénmaal getoetst, waardoor de test niet kan bevestigen of deze fouten daadwerkelijk systematisch gemaakt zouden worden en daardoor potentieel te wijten zijn aan een misconception. Een derde courant misconception lijkt betrekking te hebben op het minteken. Ondanks dat ook hier enkele leerlingen zich corrigeerden, gaf het grootste deel van de leerlingen eveneens een foutieve formule wanneer hier letterlijk naar gevraagd werd. Samen met de twee misconcepten waarbij één leerling telkens een negatief dubbelproduct schreef en een andere leerling telkens een enkel product schreef, kan dus worden geconcludeerd dat er uit de diagnostische test vijf misconcepten naar voor lijken te komen. Drie van deze misconcepten lijken bij meerdere leerlingen voor fouten te zorgen. De fouten die gemaakt werden wanneer bij het kwadraat van een som van twee getallen het MP werd toegepast, kunnen ook aan deze vijf potentiële misconcepten worden toegeschreven. Het MP hier toepassen is op zich geen misconception, aangezien hier wel een correct antwoord mee bekomen wordt indien het MP juist wordt uitgewerkt.

Uit dit onderzoek kan enkel geconcludeerd worden dat er misconcepten lijken te zijn. Om formeel te kunnen bevestigen dat de leerlingen daadwerkelijk een foutief concept hebben ontwikkeld, moet in gesprek gegaan worden met deze leerlingen. Dit was binnen dit onderzoek helaas niet mogelijk. Voor toekomstig onderzoek kan het een meerwaarde zijn om daadwerkelijk in gesprek te gaan met leerlingen, om zo niet alleen deze misconcepten te bevestigen, maar ook om inzicht te krijgen in de manier waarop deze misconcepten vorm krijgen binnen het denkkader van de leerlingen.

Tot slot zijn er ook enkele beperkingen aan de diagnostische test zoals deze gebruikt werd in dit onderzoek. Zo heeft de keuze om een korte test op te stellen, waarbij maar enkele eenvoudige vragen werden gesteld, het gevolg dat het niet mogelijk was om na te gaan of de leerlingen de gemaakte fouten altijd systematisch zouden maken, zoals al eerder werd aangegeven. Bovendien bleek de complexiteit van de tweede vraag te groot voor de klassen met minder uren wiskunde, waardoor hier sommige leerlingen niet alle vragen konden oplossen binnen de voorziene tijd en mogelijke misconcepten bij deze leerlingen niet konden worden vastgesteld. Enerzijds zorgde de vraagstelling waarbij er nog een onbekende voor het MP stond voor verwarring bij sommige leerlingen. Tezelfdertijd bleek de keuze om in vraag 2b zowel de cijfer/letter combinatie als het minteken te testen voor extra moeilijkheden te zorgen. Daarbij moet ook worden opgemerkt dat de vragen die gesteld werden net de fouten die de leerkrachten aangaven, probeerden uit te lokken. Het is dus mogelijk dat er ook andere courante fouten en eventuele misvattingen bestaan die niet in dit onderzoek naar voor kwamen.

4.2 Verschillen tussen contexten

Over het algemeen maakten de leerlingen met meer uren wiskunde op de diagnostische test minder fouten en hadden ze ook minder misconcepten dan klassen met minder uren wiskunde, wat ook werd voorspeld door de leerkrachten uit fase 1. Verder lijkt school A beter te scoren dan school B. Maar hier speelt enerzijds het effect van de leerkrachten op school A die voor de test verklapten aan hun leerlingen dat de test zou gaan over het MP. Anderzijds werden in school A ook meer klassen met meer uren wiskunde getest dan op school B. Hierdoor kan aan het verschil tussen beide scholen geen conclusie gehangen worden. Het blijft uiteraard mogelijk dat er verschillen zijn tussen verschillende scholen. Voor toekomstig onderzoek kan het dus interessant zijn om naar mogelijke verschillen op zoek te gaan en vast te stellen welke factoren binnen deze scholen effect hebben op de resultaten van leerlingen. De diagnostische test polste ook naar achtergrondfactoren bij leerlingen zoals hoe graag ze wiskunde doen en hoeveel tijd ze hierin investeren. Een eerste oppervlakkige analyse toonde geen verbanden aan tussen deze factoren en de resultaten op de test, maar voor een grondige analyse was geen ruimte binnen deze studie. Ook dit kan verder onderzocht worden in de toekomst.

In de interviews met de leerkrachten werd aangegeven dat het MP in bepaalde richtingen uit de dubbele en arbeidsmarkt finaliteit geen deel meer uitmaakt van het vernieuwde leerplan. Mede hierdoor werd gekozen om bij de diagnostische test te focussen op de doorstroomfinaliteit. Toch zijn er richtingen uit de andere finaliteiten waar het MP nog steeds deel uitmaakt van het leerplan. Leerkrachten die aan deze richtingen lesgaven rapporteerden soortgelijke vaststellingen als in richtingen met minder uren wiskunde uit de doorstroomfinaliteit. Om formeel te bevestigen dat de situatie in de dubbele en arbeidsmarkt finaliteit gelijkaardig is aan de richtingen met minder uren wiskunde uit de doorstroomfinaliteit moet bijkomend onderzoek gedaan worden.

4.3 Oorzaak van de misconcepten

Wanneer de manier waarop de leerkrachten uit fase 1 het MP uitleggen aan hun leerlingen wordt geëvalueerd, lijken enkele methoden van leerkrachten misconcepten mogelijk in de hand te werken. Meerdere leerkrachten focussen bijvoorbeeld op het uitwerken van oefeningen in plaats van voldoende stil te staan bij het achterliggende concept wat volgens Bush en Karp (2013) de kans op misconcepten verhoogt. Hierbij zijn er verschillende leerkrachten die louter terugvallen naar een formularium waarop de formules gegeven staat. Toch blijkt uit de literatuur dat het belangrijk is om te variëren in

voorstellingsvormen (Drijvers, Streun & Zwaneveld, 2019). Het MP herschrijven als een product van twee tweetermen, om zo de formule van het MP distributief af te leiden, is een eenvoudig voorbeeld waarin het MP in een licht andere vorm geschreven kan worden. Deze methode werd gebruikt door ongeveer de helft van de leerkrachten die werden geïnterviewd. Twee manieren waarmee het MP echt op een totaal andere manier kan worden voorgesteld, of mee kan worden afgeleid, zijn de oorspronkelijke meetkundige interpretatie van Euclides aan de hand van een vierkant en de Driehoek van Pascal. Maar deze methoden werden telkens maar door drie leerkrachten gebruikt. Ondanks dat er mogelijkheden zijn om te variëren in voorstellingsvormen blijkt dus dat leerkrachten hier weinig gebruik van maken. Binnen dit onderzoek kon hierbij niet getest worden of meer variëren in voorstellingsvormen er daadwerkelijk voor zorgt dat leerlingen minder misconcepten ontwikkelen tegen het MP, maar op basis van de literatuur lijkt dit een plausibele hypothese. Verder werd in de literatuur ook het gebruik van ezelsbruggetjes gelinkt aan de ontwikkeling van misconcepten (Bush & Karp, 2013; Lee & Boyadshiev, 2020), al was er maar één leerkracht die hier gebruik van maakte om het MP te verklaren.

Ook de methode van conditionering die door twee leerkrachten werd toegepast om de leerlingen attent te maken op het MP draagt niet bij aan een beter concept van het MP. Wel speelt het in op een ander probleem dat door verschillende leerkrachten werd aangehaald, namelijk dat leerlingen niet voldoende getraind zijn om het MP te herkennen. Dat leerlingen het MP niet snel herkennen bleek ook uit de diagnostische test. Wanneer leerlingen niet herkennen dat het om een MP gaat, is het ook logisch dat ze verleid worden om foutieve formules te gebruiken zoals bijvoorbeeld de visueel aantrekkelijke vorm zonder het dubbelproduct. Dit kan dan zelfs gebeuren bij leerlingen die eigenlijk zelfs geen misconcept hebben rondom het MP.

De oorzaak van de vele problemen die leerlingen ervaren met het MP werd door de leerkrachten zelf enerzijds gelegd bij een te grote brug tussen het aanleren van het MP en het toepassen ervan alsook een gebrek aan rekenvaardigheden. Een meer geïntegreerde vorm van lesgeven binnen een schooljaar en overheen de jaren, waarbij sneller wordt overgegaan naar toepassingen en leerlingen meer oefenen, lijkt volgens de leerkrachten dan ook de oplossing. Een concreet voorbeeld hiervan werd gegeven door een leerkracht in de vorm van een halfjaarlijkse test naar basiskennis. In dit onderzoek kon helaas niet worden nagegaan of deze halfjaarlijkse test daadwerkelijk een positief effect heeft op de leerresultaten van leerlingen met betrekking tot het MP. Daarnaast zijn er ongetwijfeld ook andere, eventueel aanvullende, manieren waarop de suggesties van de leerkrachten in de praktijk kunnen worden gebracht. Het is aan toekomstig onderzoek om na te gaan op welke manier dit het best gedaan kan worden zodat leerlingen in de toekomst minder moeite ervaren met het MP en hier ook minder misconcepten tegen ontwikkelen.

4.4 Conclusie

Uit dit onderzoek blijkt dat er vijf potentiële misconcepten voorkomen, waarvan drie bij meer dan één leerling. Zo wordt vaak foutief geschreven dat $(a + b)^2$ gelijk is aan $a^2 + b^2$, zorgt bij $(a - b)^2$ het minteken voor problemen en denken sommige leerlingen dat deze formules enkel geldig zijn voor de specifieke letters a en b . Voornamelijk in de klassen met minder dan zes uur wiskunde per week maken meerdere leerlingen systematisch dezelfde fouten en lijken daardoor deze misconcepten te hebben. Uit de interviews blijkt dat de manier waarop leerkrachten het merkwaardig product uitleggen aan hun leerlingen in sommige gevallen deze misconcepten in de hand zou kunnen werken. Hierbij wordt door leerkrachten te weinig gevarieerd in voorstellingsvormen. Ook blijkt dat er tussen de eerste graad en de derde graad weinig aandacht wordt besteed aan merkwaardige

producten. Hierdoor zijn leerlingen niet voldoende getraind in het herkennen van merkwaardige producten en maken ook leerlingen zonder misconcepten hier regelmatig fouten tegen. De leerkrachten geven aan dat deze brug verkleind moet worden en onderwerpen meer moeten worden geïntegreerd zowel binnen een schooljaar als doorheen de verschillende jaren.

Het is duidelijk dat er een oplossing gevonden moet worden om de problemen die leerlingen ervaren met het MP te beperken en te vermijden dat leerlingen misconcepten ontwikkelen. De suggesties die de leerkrachten geven en de vaststelling dat er weinig gevarieerd wordt in voorstellingsvormen zijn stappen in deze richting. Toch beperkt deze studie zich tot het weergeven van de huidige situatie. Hierdoor is het na dit onderzoek niet mogelijk om reeds een concrete oplossing aan te reiken. Wel kan deze studie door het beschrijven van de huidige situatie aanleiding geven tot bijkomend onderzoek waarin onderzocht en getest kan worden of de bevindingen in deze studie tot concrete oplossingen kunnen leiden.

5 Literatuurlijst

- Biemans, H. J., & Simons, P. (1995). How to use preconceptions? The contact strategy dismantled. *European Journal of psychology of education*, 10(3), 243-259.
- Booth, J. L., & Koedinger, K. R. (2008). Key misconceptions in algebraic problem solving. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (Vol. 30, No. 30).
- Bush, S. B., & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 613-632.
- Bütüner, S. Ö., & Filiz, M. (2017). Exploring high-achieving sixth grade students' erroneous answers and misconceptions on the angle concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(4), 533-554.
- Clement, J., Narode, R., & Rosnick, P. (1981). Intuitive misconceptions in algebra as a source of math anxiety. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 3(4), 36-45.
- Coolidge, J. L. (1949). The story of the binomial theorem. *The American Mathematical Monthly*, 56(3), 147-157.
- Cuemath (zd). $(a+b)^2$ formula. Geraadpleegd op 29 november 2023 via: <https://www.cuemath.com/a-plus-b-whole-square-formula/>
- Devlin, K. (1998) *Wiskunde. Wetenschap van patronen en structuren*. Beek: Natuur en Techniek.
- Devlin, K. (2000). *The language of mathematics: Making the invisible visible*. Macmillan.
- Drijvers, P. H. M., Streun, A., & Zwaneveld, G. (Eds.). (2019). *Handboek wiskundendidactiek*. Epsilon Uitgaven.
- Easdown, D. (2009). Syntactic and semantic reasoning in mathematics teaching and learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 941-949.
- Fuchs, E., & Menil, V. C. (2008). Using clinical interviews with low-performing students in mathematics. *Hostos Community College Mathematics Journal*, Spring, 21-39.
- Girit Yildiz, D., Osmanoglu, A., & Gundogdu Alayli, F. (2022). Providing a video-case-based professional development environment for prospective mathematics teachers to notice students' misconceptions in measurement. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-31.
- Green, M., Piel, J. A., & Flowers, C. (2008). Reversing education majors' arithmetic misconceptions with short-term instruction using manipulatives. *The Journal of Educational Research*, 101(4), 234-242.
- Heath, T. L. (Ed.). (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Courier Corporation.
- Jankvist, U. T., & Niss, M. (2018). Counteracting destructive student misconceptions of mathematics. *Education Sciences*, 8(2), 53.
- Kajander, A., & Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 173-181.

- Khalid, M., & Embong, Z. (2019). Sources and possible causes of errors and misconceptions in operations of integers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2).
- Lee, H. J., & Boyadzhiev, I. (2020). Underprepared College Students' Understanding of and Misconceptions with Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3).
- Lim, C. S. (2011). Assessment in Malaysian School Mathematics: Issues and Concerns. Paper presented at the meeting of The APEC-Tsukuba International Conference, Japan.
- McDonald, B. (2010). *Mathematical misconceptions*. Germany: Lap Pub.
- Neidorf, T., Arora, A., Erberber, E., Tsokodayi, Y., & Mai, T. (2020). Student misconceptions and errors in physics and mathematics: Exploring data from TIMSS and TIMSS Advanced (p. 165). Springer Nature.
- Özerem, A. (2012). Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 55, 720-729.
- Perkins, D. N., & Simmons, R. (1988). Patterns of misunderstanding: An integrative model for science, math, and programming. *Review of educational research*, 58(3), 303-326.
- Piaget, J. (1960). *The psychology of intelligence*. Littlefield, NJ: Adams.
- Pritchard, D., Grinfeld, M. (2010). The meaning of the Freshman's Dream. Degree of freedom. Geraadpleegd op 1 december 2023 op <https://strathmaths.wordpress.com/2011/11/03/the-meaning-of-the-freshmans-dream/>.
- Rafiah, H., & Ekawati, A. (2017, May). Misconceptions of the Students with High Mathematical Creative Thinking Level in Solving the Geometric Shapes Problems. In 5th SEA-DR (South East Asia Development Research) International Conference 2017 (SEADRIC 2017) (pp. 155-158). Atlantis Press.
- Resnick, L. B. (1983). Mathematics and science learning: A new conception. *Science*, 220(4596), 477-478.
- Sarwadi, H. R. H., & Shahrill, M. (2014). Understanding students' mathematical errors and misconceptions: The case of year 11 repeating students. *Mathematics Education Trends and Research*, 2014(2014), 1-10.
- Surma, T., Vanhoyweghen, K., Sluijsmans, D., Camp, G., Muijs, D., & Kirschner, P. A. (2019). *Wijze lessen: Twaalf bouwstenen voor effectieve didactiek*. Ten Brink Uitgevers.
- Taylor, P. C. (1996). Mythmaking and mythbreaking in the mathematics classroom. *Educational studies in Mathematics*, 31(1), 151-173.
- Tanisli, D., & Kose, N. Y. (2013). Pre-service mathematic teachers' knowledge of students about the algebraic concepts. *Australian Journal of Teacher Education*, 38(2), 1-18.
- Vinner, S. (1991). 'The role of definitions in teaching and learning', in D.Tall (ed.), *Advanced. Mathematical Thinking*. Kluwer, Dordrecht, pp. 65-81.
- Yetim, S., & Alkan, R. (2013). How middle school students deal with rational numbers? A mixed methods research study. *EURASIA JOURNAL OF MATHEMATICS SCIENCE AND TECHNOLOGY EDUCATION*, 9(2).

6 Bijlagen

6.1 Interviewleidraad

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Om te beginnen zou ik willen vragen om jezelf kort voor te stellen?

- Welke school?
- Aan welke richtingen geef je les?
- Welke finaliteiten?
- Hoeveel uren/week geef je les?
- Hoeveel jaren ervaring?
- Vooropleiding?

Wat is jouw ervaring met het merkwaardig product tijdens de lessen wiskunde in de derde graad?

- In welke context worden er fouten gemaakt? Heeft u eventueel voorbeelden?
 - Welke onderwerpen?
 - Welke jaren?
 - Welke richtingen?
 - Sterk vs zwak?
- Waarom maken de leerlingen denkt u deze fouten?
 - Kennen vs kunnen?

Enkele suggesties:

- $c(a + b) = c * a + c * b$
- moeilijk formule om vanbuiten te leren?
 - visueel
- het oppervlakte van een vierkant?
- Wordt het eventueel slecht aangeleerd in de eerste graad?
 - Focus op vanbuiten leren/dril oefeningen ipv conceptuele verklaring zoals ahv vierkant
- Oude vs nieuwe leerplannen?
- Wat met deze fouten?
 - $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
 - $\sin(a + b) = \sin(a) + \sin(b)$
 - $\log(a + b) = \log(a) + \log(b)$

Wanneer je merkt dat leerlingen in je klas moeite hebben met het merkwaardig product, (hoe) speel je hier dan op in?

- Enkele opties:
 - Distributief laten uitwerken van $(a + b)(a + b)$
 - Formule op het bord zetten
 - Visuele weergave ahv vierkant
 - Ezelsbruggetje
- Voorkennis opfrissen?

Wat zou er in bredere context anders kunnen?

6.2 Notitieblad

Naam (fictief of echt):



Deel 1: algemene informatie

Eventuele opmerkingen:

Deel 2: vraag 1

Berekeningen/tussenstappen:

Deel 3: vraag 2

Berekeningen/tussenstappen:

2.1)

2.2)

2.3)

Deel 4: vraag 3

Eventuele notities:

6.3 Binomium van Newton en de Driehoek van Pascal

Het Binomium van Newton geeft een algemene formule voor een natuurlijke macht van een tweeterm, namelijk: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. De uitdrukking $\binom{n}{k}$ kan visueel worden gemaakt aan de hand van de Driehoek van Pascal. Deze Driehoek wordt opgebouwd door op de randen van de Driehoek telkens 1 te schrijven en vervolgens in ieder vakje de som te schrijven van de twee bovenstaande cijfers. De formule van de derde macht van een tweeterm is dan bijvoorbeeld: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, waarbij telkens het cijfer voor iedere term overeenstemt met de cijfers uit de Driehoek van Pascal.

<i>0^e macht</i>						1
<i>1^e macht</i>				1	1	
<i>2^e macht</i>			1	2	1	
<i>3^e macht</i>		1	3	3	1	
<i>4^e macht</i>	1	4	6	4	1	
						...

Figuur 5: Driehoek van Pascal

6.4 Samenvattende tabel vraag 2 van diagnostische test

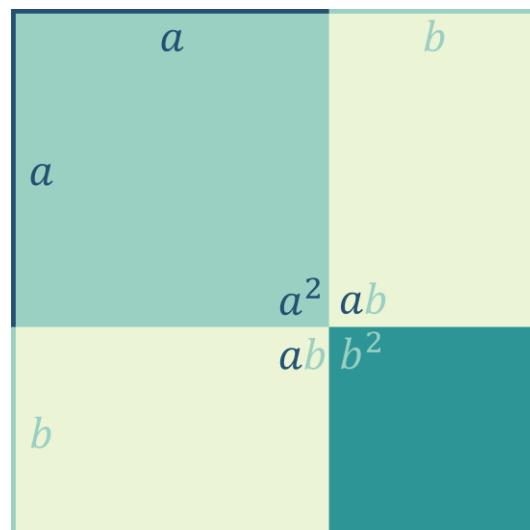
Tabel 7: overzicht van de gemaakte fouten bij vraag 2 van de diagnostische test, opgedeeld per deelvraag en per klas. Het aantal fouten per klas wordt verder opgedeeld in een aantal specifieke fouten zoals 2ab (het dubbelproduct vergeten), min (een fout tegen het minteken), ax (een fout waarbij een cijfer/letter combinatie voor problemen zorgt), het aantal keer een vraag werd opengelaten en het aantal andere fouten die werden gemaakt. Hierbij werden percentages berekend ten opzichte van het totaal aantal fouten over alle deelnemers. Tot slot wordt onderaan weergegeven hoeveel van de ingevulde oefeningen bij vraag 2c werden opgelost door gebruik te maken van het MP. Hier werd het percentage berekend per klas.

vraag 2a	klas (aantal leerlingen)	VJC8 (25)	VJC6 (24)	VVX6 (27)	VJC4 (22)	VVX4/5 (10)	VVX4 (11)	totaal (119)
	aantal fouten	1	7	4	15	9	11	47
	% van totaal	2%	15%	9%	32%	19%	23%	100%
	2ab		1	2	6	6	9	24
	% van totaal		2%	4%	13%	13%	19%	51%
	open				4			4
	% van totaal				9%			9%
	andere	1	6	2	5	3	2	19
	% van totaal	2%	13%	4%	11%	6%	4%	40%
vraag 2b	klas (aantal leerlingen)	VJC8 (25)	VJC6 (24)	VVX6 (27)	VJC4 (22)	VVX4/5 (10)	VVX4 (11)	totaal (119)
	totaal fouten	1	6	8	18	13	19	65
	% van totaal	2%	9%	12%	28%	20%	29%	100%
	2ab		1	2	5	6	9	23
	% van totaal		2%	3%	8%	9%	14%	35%
	min		2	4	3	2	5	16
	% van totaal		3%	6%	5%	3%	8%	25%
	ax		1	1	2	2	3	9
	% van totaal		2%	2%	3%	3%	5%	14%
	waarvan open				6	1		7
	% van totaal				9%	2%		11%
	andere	1	2	1	2	2	2	10
	% van totaal	2%	3%	2%	3%	3%	3%	15%
vraag 2c	klas (aantal leerlingen)	VJC8 (25)	VJC6 (24)	VVX6 (27)	VJC4 (22)	VVX4/5 (10)	VVX4 (11)	totaal (119)
	totaal fouten	1	3	7	16	9	11	47
	% van totaal	2%	6%	15%	34%	19%	23%	100%
	2ab		1	2	3	6	8	20
	% van totaal	0%	2%	4%	6%	13%	17%	43%
	open				11			11
	% van totaal	0%	0%	0%	23%	0%	0%	23%
	andere fouten	1	2	5	2	3	3	16
	% van totaal	2%	4%	11%	4%	6%	6%	34%
	# ingevuld (2c)	24	24	27	11	10	11	108
	Gebruiken MP	6	12	25	6	7	8	64
	% gebruiken MP	25%	50%	93%	55%	70%	73%	59%

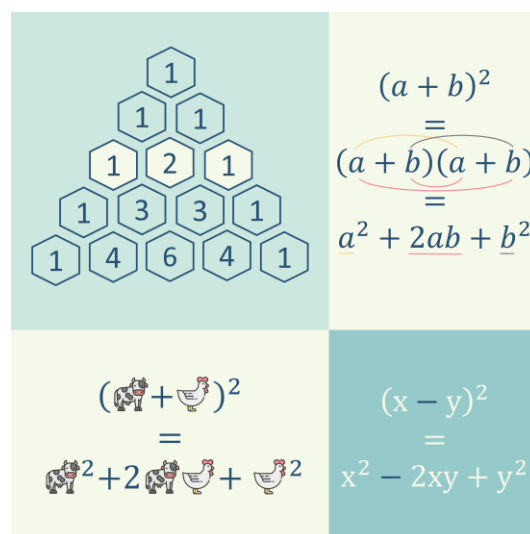
6.5 Creatief project

Uit dit onderzoek bleek dat een mogelijke oorzaak van de potentiële misconcepten bij leerlingen een gebrek aan visualisatie van het merkwaardig product kan zijn. Sommige leerkrachten wisten hierbij zelf bijvoorbeeld niet dat het merkwaardig product visueel kan worden afgebeeld aan de hand van een vierkant met als zijden $(a + b)$. Om leerkrachten inspiratie te geven in hoe ze het merkwaardig product op verschillende manieren kunnen voorstellen, werd een flyer gemaakt. Tegelijk is het voor leerkrachten mogelijk om deze flyer af te drukken en als poster in hun lokaal te hangen.

Op de voorzijde van de flyer staat de voorstelling aan de hand van het vierkant. Aan de achterkant worden vervolgens nog vier verschillende voorstellingsvormen aangereikt: de driehoek van pascal, een distributieve uitwerking met behulp van pijlen, kippen en koeien in plaats van de algemene termen a en b en het kwadraat van een verschil met nadruk op het minteken en weergegeven in het wit (een inverse kleur voor de inverse bewerking) waarbij opnieuw met andere termen dan a en b wordt gewerkt. Tegelijk komen in deze voorstellingsvormen de drie meest voorkomende misconcepten naar voor (dubbelproduct, andere symbolen en het minteken).



Figuur 6: voorkant van de flyer



Figuur 7: achterkant van de flyer



Figuur 8: poster ter verduidelijking van de flyer