



**UHASSELT**

KNOWLEDGE IN ACTION

## School voor Educatieve Studies

Educatieve master in de wetenschappen en technologie

### **Masterthesis**

#### **Voorkennis wiskunde eerstejaars studenten UHasselt**

#### **Ansfried Janssens**

Scriptie ingediend tot het behalen van de graad van Educatieve master in de wetenschappen en technologie, afstudeerrichting wetenschappen

#### **PROMOTOR :**

dr. Mario GIELEN



**UHASSELT**

KNOWLEDGE IN ACTION

**www.uhasselt.be**

Universiteit Hasselt  
Campus Hasselt:  
Martelarenlaan 42 | 3500 Hasselt  
Campus Diepenbeek:  
Agoralaan Gebouw D | 3590 Diepenbeek

**2024**  
**2025**



# **School voor Educatieve Studies**

Educatieve master in de wetenschappen en technologie

## ***Masterthesis***

### ***Voorkennis wiskunde eerstejaars studenten UHasselt***

#### **Ansfried Janssens**

Scriptie ingediend tot het behalen van de graad van Educatieve master in de wetenschappen en technologie, afstudeerrichting wetenschappen

#### **PROMOTOR :**

dr. Mario GIELEN





# **Voorkennis wiskunde UHasselt**

bacheloropleidingen economie, chemie, fysica en wiskunde

Janssens Ansfried 1643325  
Educatieve Master: Wiskunde  
Begeleider: dr. M. Gielen  
Masterproef LIO  
2024-2025

# Inhoudsopgave

|                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Literatuurstudie en probleemstelling</b>                   | <b>3</b>  |
| 1.1 Literatuurstudie                                            | 3         |
| 1.2 Probleemstelling                                            | 5         |
| <b>2 Onderzoeksopzet en methoden</b>                            | <b>6</b>  |
| 2.1 Onderzoeksvragen                                            | 6         |
| 2.2 Methodologie                                                | 6         |
| <b>3 Onderzoeksresultaten</b>                                   | <b>7</b>  |
| 3.1 Uren wiskunde in het secundair onderwijs                    | 7         |
| 3.1.1 Economie                                                  | 8         |
| 3.1.2 Wetenschappen                                             | 8         |
| 3.2 Handelswetenschappen (HW)                                   | 8         |
| 3.3 Schakelstudenten HW                                         | 10        |
| 3.4 Toegepaste Economische Wetenschappen (TEW)                  | 11        |
| 3.5 Handelsingenieur en Bedrijfsinformatica (HI/BI)             | 12        |
| 3.6 Chemie                                                      | 13        |
| 3.7 Fysica                                                      | 14        |
| 3.8 Wiskunde                                                    | 15        |
| 3.9 IJkingstoets wiskunde                                       | 16        |
| <b>4 Discussie en Conclusie</b>                                 | <b>18</b> |
| <b>5 Ontwerp</b>                                                | <b>19</b> |
| <b>6 Bijlagen</b>                                               | <b>22</b> |
| 6.1 Bijlage 1: Test voorkennis wiskunde voor HW, TEW, HI/BI     | 22        |
| 6.2 Bijlage 2: Test voorkennis wiskunde voor chemie             | 24        |
| 6.3 Bijlage 3: Test voorkennis wiskunde voor wiskunde en fysica | 26        |
| 6.4 Bijlage 4: Septemburcursus HW                               | 28        |

## Samenvatting

Deze masterproef onderzoekt de wiskundige voorkennis van eerstejaarsstudenten aan de UHasselt in de richtingen economie (HW, TEW, HI/BI), chemie, fysica en wiskunde. De focus ligt op de wiskundige voorkennis die noodzakelijk is voor de bacheloropleiding. Vanuit de praktijk stel ik vast dat een groot aantal studenten niet de vereiste wiskundige voorkennis hebben. Volgens mijn ervaring zijn er twee mogelijke denkpistes: ofwel werden niet alle wiskundige eindtermen gezien in het secundair onderwijs ofwel kunnen de studenten de wiskundeconcepten niet meer toepassen.

Daarom werd per opleiding een steekproef gedaan. Studenten vulden een vragenlijst in over het aantal uren wiskunde en welke wiskundige concepten zij in het secundair onderwijs geleerd hebben. Voor de studenten fysica en wiskunde werd ook gevraagd naar het wel of niet slagen op hun ijkingsstoets. Daarnaast kregen alle studenten vier oefeningen voorgelegd.

De resultaten tonen aan dat de meeste studenten de verwachte voorkennis gezien hebben in het secundair onderwijs, met uitzondering van studenten HW en HW schakel. Bij hen blijken basisconcepten zoals de regel van Horner en het oplossen van lineaire en tweedegraadsvergelijkingen onvoldoende gekend te zijn. Het grote probleem was dat veel studenten TEW, HI/BI en chemie de 4 oefeningen niet konden oplossen. Dit in tegenstelling tot de studenten fysica en wiskunde. Van hen kon het merendeel de vier oefeningen correct oplossen. Dit suggereert dat studenten economie en chemie de leerstof wel herkennen, maar moeite hebben met de toepassing ervan.

De resultaten tonen aan dat een opfrissing van wiskundige basiskennis wenselijk is. UHasselt organiseert hiervoor een septembercursus. Als creatieve opdracht heb ik deze cursus voor de HW herwerkt in de hoop dat de studenten beter voorbereid aan hun opleiding kunnen beginnen.

Voor fysica en wiskunde werd nagegaan of het slagen op de ijkingsstoets overeenstemt met het wel of niet slagen voor wiskundevakken op het einde van het eerste semester. Dit blijkt niet het geval: aanzienlijk meer studenten slagen voor de wiskundevakken aan de UHasselt dan voor de ijkingsstoets. Dit impliceert dat men in de toekomst de ijkingsproef voor fysica en wiskunde zou kunnen herzien.

## 1 Literatuurstudie en probleemstelling

### 1.1 Literatuurstudie

Als wiskundige heb ik me vooral gefocust op bronnen die data bevatten over de slaagkansen van studenten aan de Vlaamse universiteiten. Meten is weten. Het aantonen of studenten kunnen slagen voordat ze aan deze opleiding beginnen, is waardevol voor de student in kwestie en de samenleving. De slagingspercentages, gebaseerd op de gevolgde richting in het secundair onderwijs, zijn beschikbaar [10].

In het verleden heeft de UHasselt geprobeerd een app te ontwikkelen om aan de hand van data te kunnen aantonen hoe groot de kans was dat een toekomstige student zou slagen voor een opleiding [13]. Er kwam hier kritiek op van onderwijsexperten. De heer Dirk van Damme, prof. dr. in de pedagogie aan de UGent, meldde: "In het Vlaamse onderwijs, met grote verschillen tussen scholen, is de voorspellende waarde van SO-resultaten relatief laag. Ijkingstoetsen zijn een veel beter alternatief." [13]

De invoering van ijkingsstoetsen zouden volgens de samenstellers van deze toetsen een activerende werking hebben. Ze meten de startcompetenties van studenten en geven de mogelijkheid om te remediëren [13]. De ijkingsstoetsen zouden eigenlijk hetzelfde doen als de bekritiserende UHasselt app. Wijlen rector aan de UHasselt, de heer Luc De

Schepper, formuleerde het als volgt: "Degenen die slagen op de ijkingstoetsen voor ingenieursrichtingen zijn uiteindelijk ook meestal de leerlingen die veel wiskunde hebben gehad" [13].

Deze opmerking van de heer De Schepper duidt een belangrijke correlatie tussen het aantal uren wiskunde in het secundair onderwijs en de slagingskansen aan de universiteit aan. Op basis van de statistieken over de slagingspercentages aan de universiteiten [10, 15], wordt opgemerkt dat het aantal uren wiskunde de grote doorslag geeft. Soms is er zelfs meer dan 20% slaagkansen verschil tussen vooropleidingen met minder uren wiskunde. Dit verklaart ook waarom alle ijkingstoetsen en ingangsexamens een wiskunde component hebben [18, 19]. De hogere slagingspercentages voor wiskundig sterkere leerlingen is niet enkel een Vlaams fenomeen. Dezelfde correlatie is te vinden in verschillende landen gaande van Australië tot de Verenigde Staten van Amerika en in nog veel andere landen en culturen [3, 11].

De laatste jaren blijkt uit de PISA resultaten [16] dat het niveau van wiskunde dalend is in Vlaanderen. Deze dalende trend heeft ook invloed op het slagingspercentage voor het afronden van een universitaire opleiding [11]. Door het dalend niveau van wiskunde kan men de vraag stellen of het voor wiskundig zwakkere studenten niet steeds moeilijker wordt om een diploma te behalen aan de universiteit [15].

Elke opleiding heeft andere verwachtingen over de wiskundige concepten, die studenten moeten begrijpen en toepassen. Voor studenten economie zijn vooral lineaire algebra, functies en differentiaalvergelijkingen essentieel. Hier worden echter regelmatig tekorten vastgesteld. Volgens Mallik [2, 11, 12] leidt een gebrek aan inzicht in basiswiskunde tot een verhoogd falen bij eerstejaars van de bachelor richting economie. De wiskundige component in economische opleidingen wordt vaak onderschat door studenten.

Voor de bachelor opleidingen wiskunde en fysica zijn sinds het academiejaar 2022-2023 ijkingstoetsen verplicht [1, 14]. Het doel is om studenten een beter inzicht te geven of de beoogde opleiding voor hen wel geschikt is. Of de ijkingstoetsen daadwerkelijk een goed beeld geven over de slagingskansen is nog af te wachten. De studenten, die meededen aan deze ijkingstoets, zullen pas ten vroegste op het einde van het huidige academiejaar 2024-2025 hun bachelorstudie afronden. Er wordt ook beweerd [4], dat de belangrijkste drijfveer voor de overheid om ijkingstoetsen te houden en deze te verplichten is om studenten, die een mindere score hebben behaald, te overtuigen de opleiding niet te volgen. Dit zou de overheid veel geld kunnen besparen.

De richting chemie heeft ook een ijkingstoets, maar deze is niet verplicht. Deze ijkingstoets bestaat voor de helft uit wiskundevragen [9]. Dit wijst er opnieuw op dat voor de opleiding chemie de voorkennis wiskunde een belangrijk onderdeel is dat bepaalt of studenten slagen of niet.

Omdat wiskunde voor de bovengenoemde richtingen cruciaal is om te kunnen slagen, hebben zo goed als alle Vlaamse universiteiten een overzicht per opleiding gemaakt, wat de toekomstige studenten moeten kennen/kunnen voordat ze aan hun opleidingen beginnen, vertrekkende vanuit de leerplannen en eindtermen. Voor de UHasselt is dit het leerplatform wiskunde [6].

Als leerlingen afstuderen in het secundair onderwijs, zouden alle eindtermen voor wiskunde voor die studierichting behaald moeten zijn. De vraag is echter of dit effectief ook zo is en of de toekomstige studenten de inhoud en hun toepassingen uit het secundaire onderwijs in hun geheugen verankerd hebben. De samenleving vraagt om

goed opgeleide leerkrachten wiskunde. Niet alleen om wiskunde te studeren maar ook voor al de andere universitaire opleidingen waar de wiskundige component zo belangrijk is om te slagen. Hierbij denken we aan het ingangsexamen geneeskunde en de starttoets burgerlijk ingenieur. Op dit ogenblik worden de leerkrachten wiskunde echter met het probleem van de leerplannen geconfronteerd. Welk leerplan moeten ze volgen: het leerplan van het katholiek onderwijs [20], het leerplan van het gemeenschapsonderwijs [5] of het leerplan wiskunde opgesteld door enkele leerkrachten van het vak [21]. De drie leerplannen zijn door de overheid goedgekeurd. Welk leerplan sluit nu het best aan om met succes een opleiding in het Hoger Onderwijs te volgen.

## 1.2 Probleemstelling

De vakken wiskunde en statistiek vormen voor veel eerstejaars bachelorstudenten een struikelblok. Als lid van de vakgroep wiskunde en statistiek aan de UHasselt merken we dat de niet zo adequate voorkennis de oorzaak is waarom veel studenten de lessen wiskunde en statistiek moeilijk vinden. Er is een grote verscheidenheid aan voorkennis wiskunde bij de studenten binnen eenzelfde richting. Dit heeft te maken met het feit dat elke persoon, die een diploma van het secundair onderwijs behaald heeft in bijna elke richting mag starten, zonder dat men weet of deze persoon de vereiste wiskundige voorkennis en talenten heeft.

Het gevolg hiervan is dat er vanuit de Vlaamse overheid steeds meer ijkingsstoetsen (meestal wiskunde) worden georganiseerd en geleidelijk aan verplicht gemaakt worden voor studenten. Dit is bijvoorbeeld het geval voor de bacheloropleidingen wiskunde en fysica. Voor hen is er een starttoets. Dit is een verplichte ijkingsstoets. Toekomstige studenten, die deze opleidingen willen studeren, zijn verplicht om aan deze ijkingsstoetsen deel te nemen. Deze verplichting voor de opleidingen wiskunde en fysica is nu reeds 3 jaar van kracht. Studenten krijgen 30 multiple choice vragen, waarvan de totaalscore herleid wordt naar een score op 20 punten. Deze ijkingsstoetsen worden op Vlaams niveau afgenomen aan alle Vlaamse universiteiten. Bij de laatste editie, academiejaar 2024-2025, deden over heel Vlaanderen in juli 391 deelnemers (39% slaagpercentage) en in augustus 199 deelnemers mee (21% slaagpercentage) [9]. Elke universiteit koppelt een andere verplichting aan het niet slagen op deze ijkingsstoetsen. De UHasselt verplicht studenten, die niet geslaagd zijn een gratis opfriscursus in september te volgen. Deze septembercursus herhaalt in 1 week alle geziene leerstof van wiskunde uit het secundair onderwijs. De septembercursus wordt eigenlijk aangeraden aan alle toekomstige studenten, geslaagd of niet, zodat de studenten al de campus en hun medestudenten kunnen leren kennen. De groepsindeling voor de septembercursus wordt aan de hand van het verwachte niveau wiskunde geregeld. Zo zitten toekomstige studenten wiskunde en fysica samen en in een andere groep volgen studenten handelsingenieurs (HI) en bedrijfsinformatica (BI) samen de opfriscursus.

Er zijn ook septembercursussen wiskunde voor andere richtingen die geen verplichte ijkingsstoets hebben. In deze septembercursussen wordt de wiskunde uit het secundair onderwijs herhaald, maar afhankelijk van de opleiding aan de UHasselt wordt er een bepaalde wiskundige leerstof wel of niet herhaald. Of de juiste leerstof herhaald wordt tijdens de septembercursus weten we niet. De vraag rijst of de septembercursus moeten aangepast worden of niet.

## 2 Onderzoeksopzet en methoden

### 2.1 Onderzoeksvragen

Het doel van deze paper (O3-LIO OPTIE 1) is aan de hand van een steekproef naar de voorkennis wiskunde van de eerstejaars studenten aan de UHasselt te peilen. De resultaten van deze steekproef kunnen worden gebruikt als antwoord op de vraag of de septembercursussen wiskunde aan de UHasselt moeten bijgestuurd worden of niet. De eventuele aanpassing van de bestaande septembercursus dient als creatief ontwerp bij deze paper.

**Hoofdonderzoeksvraag:** Hoe is het met de voorkennis wiskunde van het eerste jaar economie (HW, TEW, HI/BI), chemie, fysica en wiskunde aan de UHasselt (het academiejaar 2024-2025) gesteld én is er een noodzaak om de septembercursussen te updaten?

Vandaar de volgende specifieke deelvragen:

**Deelvraag 1:** Welke wiskundige concepten hebben leerlingen in het secundair onderwijs (schooljaar 2023-2024) gezien naargelang hun studiekeuze aan de UHasselt?

**Deelvraag 2:** Is er binnen de economische richtingen een verschil met de voorkennis wiskunde bij startende studenten?

**Deelvraag 3:** Zijn de ijkingstoetsen wiskunde voor de wetenschappelijke richtingen (wiskunde en fysica) een goede indicator voor het slagen voor het eerste bachelor examen wiskunde in het eerste kwartiel van het academiejaar 2024-2025 aan de UHasselt?

### 2.2 Methodologie

De studenten vullen tijdens het eerste responsiecollege wiskunde vrijwillig een vragenlijst in (zie bijlagen 6.1, 6.2, 6.3). Deze vragenlijst bevat volgende onderdelen:

A. Algemene gegevens.

1. Identificatiegegevens.
2. Welke opleiding volgt de student aan de UHasselt?
3. Hoeveel uur wiskunde volgde de student in het zesde jaar secundair onderwijs?
4. In welk onderwijstype werd les gevolgd?
5. Welke richting volgde de student in het secundair onderwijs?
6. Voor de studenten fysica en wiskunde: Wat was het resultaat van de ijkingstoets?

B. Welke wiskundeonderdelen/begrippen ken je? Tijdens het invullen van deze vragenlijst werd gemeld, dat als ze niet zeker waren of ze het onderwerp gezien hadden, dat ze dan deze niet moesten aanduiden. Enkel wanneer de student zeker was, dat men de leerstof in het secundair onderwijs gezien had, mocht men het aankruisen.

C. Oplossen 4 oefeningen.

Het benoemen van gekende begrippen, zegt natuurlijk niets over het kunnen toepassen van de geziene leerstof. Daarom kregen dezelfde studenten 4 oefeningen op te lossen (zie bijlagen 6.1, 6.2, 6.3). Elke vraag komt overeen met de geziene voorkennis uit het secundair:

- Vraag 1: Lineaire vergelijkingen → Inhoud: 3<sup>de</sup> secundair onderwijs.
- Vraag 2: tweedegraadsvergelijking → Inhoud: 4<sup>de</sup> secundair onderwijs.
- Vraag 3: Limieten en  $\ln(x)$  → Inhoud: 5<sup>de</sup>/6<sup>de</sup> secundair onderwijs.
- Vraag 4: Integraal met substitutie → Inhoud: 6<sup>de</sup> secundair onderwijs.

De studenten hebben 2 opties:

- 1) De studenten lossen de vraag op. Het gegeven antwoord kan 'Juist' of 'fout' zijn.
- 2) De studenten omcirkelen 'geen idee' hoe de vraag op te lossen.

### 3 Onderzoeksresultaten

In de volgende subsecties worden de resultaten van de bevraging van de studenten per richting besproken. Dit gebeurt volgens eenzelfde stramien:

1. Een overzicht van het aantal uren wiskunde dat de studenten in het laatste jaar secundair onderwijs hebben gevolgd.
2. Welke wiskundeonderwerpen zijn door de studenten als 'gezien' aangekruist.

De resultaten van die geziene wiskundeonderdelen/begrippen hangen uiteraard af van het gevolgde leerplan dat bij het 'aantal uren' behoort. In het wiskundeplatform worden sommige onderdelen als BASIS gecatalogiseerd. Andere krijgen het etiket EXTRA [6].

- **BASIS**: Deze leerstof wordt voor alle studenten op basis van de leerplannen als gekende leerstof beschouwd. Deze leerinhoud wordt niet meer herhaald tijdens de universitaire lessen wiskunde.
- **EXTRA**: Deze leerstof wordt uitgelegd tijdens de lessen wiskunde aan de universiteit. In sommige richtingen in het secundair onderwijs komt deze leerstof wel aan bod.

Als het wiskundig onderwerp als 'basis' wordt aanzien (bijv. Stelling van Pythagoras), betekent dit dat het begrip door alle leerlingen in het secundair onderwijs moet gezien zijn. Als minder dan 90% van de studenten dit onderwerp kent, aanzien we dit als een probleem. De basisonderwerpen die door meer dan 90% van de studenten zijn gekend, worden groen ingekleurd. Is de score lager dan 90% krijgt dat item een rode kleur. Voor de begrippen die volgens het wiskundeplatform niet door alle studenten werden gezien dus 'extra', ligt de cesuur en dus ook kleurencode anders.

|              |                                                                                            |              |                                                                                                                                     |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>BASIS</b> | <div> <div></div> als <math>\geq 90\%</math> <div></div> als <math>&lt; 90\%</math> </div> | <b>EXTRA</b> | <div> <div></div> als <math>\geq 80\%</math> <div></div> als <math>50\% - 80\%</math> <div></div> als <math>&lt; 50\%</math> </div> |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Natuurlijk is het gezien hebben van de leerstof niet voldoende. Studenten moeten deze leerstof, zeker de basisleerstof kunnen toepassen. Vragen 1 en 2 behoren tot de basisleerstof voor alle studierichtingen. Vragen 3 en 4 zijn voor sommige richtingen basisleerstof, voor andere richtingen extra. Daarom wordt er ook nagegaan hoe de studenten van de verschillende bacheloropleidingen de 4 vragen hebben beantwoord.

#### 3.1 Uren wiskunde in het secundair onderwijs

Om een globaal overzicht te hebben van de wiskundige voorkennis van de studenten uit de verschillende opleidingen, werd er aan de studenten gevraagd hoeveel uren wiskunde zij hebben gehad in hun laatste jaar van hun secundair onderwijs. De resultaten staan in Tabel 1.

| Uren | HW      | HW Schakels | TEW     | HI/BI   | chemie  | fysica  | wiskunde |
|------|---------|-------------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 3    | 49,44 % | 54,41 %     | 20,00 % | 3,57 %  | 3,33 %  | 3,45 %  | 0,00 %   |
| 4    | 30,56 % | 27,94 %     | 8,57 %  | 5,95 %  | 16,67 % | 0,00 %  | 0,00 %   |
| 5    | 5,00 %  | 5,88 %      | 17,14 % | 3,57 %  | 3,33 %  | 3,45 %  | 0,00 %   |
| 6    | 12,78 % | 7,35 %      | 45,71 % | 60,71 % | 53,33 % | 41,38 % | 46,15 %  |
| 7    | 1,67 %  | 1,47 %      | 0,00 %  | 16,67 % | 10,00 % | 20,69 % | 23,08 %  |
| >8   | 0,56 %  | 2,94 %      | 8,57 %  | 9,52 %  | 13,33 % | 31,03 % | 30,77 %  |

Tabel 1: Antal uren wiskunde in het secundair bij de onderzochte richtingen.

### 3.1.1 Economie

De opleiding Handelswetenschappen (HW) is gesplitst in twee groepen: de HW groep bestaande uit eerstejaars bachelorstudenten, die vorig jaar nog in het secundair onderwijs zaten en HW schakelgroep. Dit zijn studenten die reeds een bacheloropleiding hebben gevolgd. Deze opsplitsing zal ook gebeuren bij de inhoudelijke voorkennis. Voor de studenten HW en HW schakel gaat men er op het wiskundeplatform van uit dat ze 3 of 4 uur wiskunde hebben gehad. Uit onze steekproef blijkt dat 80% van de studenten HW en HW Schakel les heeft gevolgd in een richting met 3 of 4 uur wiskunde. 20% heeft een cursus van van 5 uur of meer gevolgd. Natuurlijk zal het makkelijker zijn voor studenten die meer wiskunde hebben gehad in het secundair onderwijs om de universitaire lessen wiskunde en statistiek te volgen. Voor de groep Toegepaste Economische Wetenschappen (TEW) zien we andere cijfers. Het procentueel aantal studenten die uit een richting met 3 of 4 uur wiskunde komen, bedraagt 28%. De grootste groep (62%) heeft een wiskundecursus van 5 of 6 uur gevolgd. Op basis van het wiskundeplatform is deze grootste groep de beoogde doelgroep. De studenten ingeschreven in de richtingen Handelsingenieur (HI) en Bedrijfsinformatica (BI) komen voor 85% uit een richting met minstens 6 uur wiskunde. 15% volgde een richting met minder wiskunde. Voor de opleiding HI/BI is volgens het wiskundeplatform 6 uur wiskunde zeker een vereiste.

### 3.1.2 Wetenschappen

Bij de studenten die gekozen hebben voor de richting chemie is de opdeling minder eenduidig. 23% van studenten komen uit richtingen waar 3 tot 5 of 7 tot 8 uur wiskunde wordt gegeven. Iets meer dan de helft van de studenten heeft een cursus van 6 uur wiskunde gevolgd, wat volgens het wiskundeplatform de ideale voorbereiding is. Het beeld is weer anders bij de studenten fysica en wiskunde. 6 uur wiskunde is zo goed als een verplichting voor deze beide richtingen. Er zijn in de richting fysica hierop maar enkele uitzonderingen.

Het aantal uren is slechts één indicatie. Belangrijker is wat studenten tijdens die uren gezien hebben. Dit wordt nu per richting bekeken.

## 3.2 Handelswetenschappen (HW)

Wanneer de eerstejaars bachelorstudenten werd gevraagd om aan te duiden welke onderwerpen ze gezien hebben in het secundair onderwijs, waren dit de resultaten: Tabel 2. In het totaal deden er 180 studenten HW mee aan dit onderzoek. Wat vooral blijkt is dat de kennis van de basiswiskundeonderwerpen ondermaats is. Er zijn ook enkele inconsistenties met de antwoorden. Lineaire vergelijkingen is het gebruikelijke woord voor eerstegraadvergelijkingen. Slechts 51,11% van de studenten claimt dit te hebben gezien, terwijl voor tweedegraadvergelijkingen, de steekproef aantoonde dat

88,89% dit onderwerp wel gezien hebben. Dit kan niet. Het is onmogelijk om tweedegraadsvergelijkingen gezien te hebben, zonder eerstegraadsvergelijkingen te kunnen oplossen. Dit is een duidelijk voorbeeld dat studenten, niet weten wat ze kennen. Een ander voorbeeld is het verschil in bekendheid van  $x^2 + y^2 = r^2$  en  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ . De eerste formule is de algemene formule voor een cirkel met als middelpunt de oorsprong, de andere formule is de eenheidscirkel, dit is een cirkel met als middelpunt de oorsprong en met straal 1. Je kan de moeilijker variant met  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  niet gezien hebben voordat  $x^2 + y^2 = r^2$  gekend is. Dit bewijst dat studenten vergeten wat ze gezien hebben.

|                                   |         |                                   |         |
|-----------------------------------|---------|-----------------------------------|---------|
| Stelling van Pythagoras BASIS     | 96,11 % | Verzamelingenleer                 | 16,67 % |
| $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$ BASIS   | 87,78 % | Goniometrische functies           | 53,89 % |
| Lineaire vergelijkingen BASIS     | 51,11 % | Limieten EXTRA                    | 67,78 % |
| Tweedegraadsvergelijkingen BASIS  | 88,89 % | Regel van l'Hôpital EXTRA         | 25,00 % |
| Horner BASIS                      | 82,78 % | Binomium van Newton EXTRA         | 26,67 % |
| $x^2 + y^2 = r^2$ EXTRA           | 24,44 % | Kansrekening EXTRA                | 81,67 % |
| $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ EXTRA | 74,44 % | Normaal verdeling EXTRA           | 58,33 % |
| e-macht EXTRA                     | 33,89 % | Meervoudige integralen            | 16,11 % |
| $\log(x)$ EXTRA                   | 88,89 % | Differentiaalvergelijkingen EXTRA | 20,00 % |
| $\ln(x)$ EXTRA                    | 48,33 % | Taylor benadering                 | 6,11 %  |
| Matrix rekenen EXTRA              | 62,22 % | Impliciet afleiden                | 6,11 %  |
| Determinanten EXTRA               | 46,11 % | Partieel afgeleiden EXTRA         | 15,56 % |
| Eigenwaarden/Eigenvectoren        | 6,67 %  | Trapeziumregel                    | 5,56 %  |
| Afgeleiden EXTRA                  | 91,11 % | Complexe getallen                 | 27,78 % |
| Integratie door substitutie EXTRA | 40,00 % | Grafentheorie                     | 3,89 %  |
| Partiële integratie EXTRA         | 23,89 % | Zelf bewijzen maken               | 10,56 % |

Tabel 2: Percentage studenten HW, die de wiskundige onderwerpen gezien hebben in het secundair.

Van de door het leerplan voorgeschreven basisgedeelte is enkel de stelling van Pythagoras door meer dan 90% van de leerlingen gezien. Alle andere basisonderdelen scoren minder dan 90%. Opvallend is wel dat van de extra leerstof het onderdeel afgeleiden meer dan 90% scoort, terwijl dit voor de studenten uit die doelgroep geen noodzakelijke leerstof is. Het gezien hebben van de onderwerpen in het secundair is niet voldoende, het kunnen toepassen is natuurlijk ook belangrijk. De studenten kregen 4 wiskundevragen om op te lossen. De resultaten van de vragen staan in Tabel 3. Er zijn

| Vragen  | Correct | Fout    | Geen Idee |
|---------|---------|---------|-----------|
| Vraag 1 | 19,44%  | 47,22%  | 33,33 %   |
| Vraag 2 | 28,89%  | 34,44%  | 36,67%    |
| Vraag 3 | 1,11%   | 22,22 % | 76,67 %   |
| Vraag 4 | 1,67%   | 6,67%   | 91,67%    |

Tabel 3: Percentage studenten HW, die vragen juist/fout hadden of 'geen idee' aanduiden.

amper studenten HW, die in staat zijn om vraag 3 en 4 correct op te lossen. Deze onderwerpen worden herhaald tijdens de universitaire lessen wiskunde, maar zouden eigenlijk geziene leerstof moeten zijn. Bij vraag 3 moest de regel van l'Hopital gebruikt worden. 25% van de HW studenten claimt dat ze dit onderwerp gezien hebben in het secundair, maar slechts 1,11% van de studenten was in staat deze vraag op te lossen. Voor vraag 4 waar integratie door substitutie gebruikt moest worden, claimt 40% van de studenten dit gezien te hebben in het secundair, maar slechts 1,67%, gaf een correct antwoord.

Voor de studenten is het erger dat ze niet in staat waren om vraag 1 en 2 correct op te lossen. Deze onderwerpen worden gezien als basisleerstof en worden niet herhaald tijdens hun universitaire lessen wiskunde. Maar het kunnen oplossen van deze vragen is cruciaal voor het begrijpen van de universitaire lessen wiskunde. Vraag 1 ging over het oplossen van lineaire vergelijkingen. 51% van de studenten zouden deze leerstof gezien hebben, maar dat is niet juist. Lineaire vergelijkingen is een ander woord voor eerstegraadsvergelijkingen. Iets minder dan 90% van de studenten HW claimen dat ze tweedegraadsvergelijkingen gezien hebben. Dat is onmogelijk als je de vorige stap, eerstegraadsvergelijkingen niet zouden hebben bestudeerd. Dit bewijst vooral dat studenten niet weten/onthouden hebben wat een lineaire vergelijking is. Maar dat zou niet zo erg zijn als studenten in staat waren deze vergelijkingen op te lossen. Maar daar ligt ook een probleem. Studenten waren maar in 19,44% van de gevallen in staat een eerstegraadsvergelijking uit te werken en maar 28,89% was in staat om te zien dat het oplossen van de derdegraadvergelijking gemakkelijk kon gedaan worden door een  $x$  buiten te brengen en dan de overgebleven tweedegraadsvergelijkingen op te lossen.

### 3.3 Schakelstudenten HW

Deze schakelstudenten HW zitten samen bij de eerstejaars bachelor HW. Dit is gebruikelijk voor schakelstudenten. Dit gebeurt ook bij schakelstudenten voor TEW en HI/BI. Maar in vergelijking met net vernoemde opleidingen, is het aantal schakelstudenten bij de HW aanzienlijk. In totaal hebben 68 schakelstudenten HW mee gedaan aan dit onderzoek. In de volgende Tabel 4, staan de data over hun voorkennis.

|                                          |         |                                          |         |
|------------------------------------------|---------|------------------------------------------|---------|
| Stelling van Pythagoras <b>BASIS</b>     | 97,06 % | Verzamelingenleer                        | 17,65 % |
| $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$ <b>BASIS</b>   | 88,24 % | Goniometrische functies                  | 22,06 % |
| Lineaire vergelijkingen <b>BASIS</b>     | 61,76 % | Limieten <b>EXTRA</b>                    | 61,76 % |
| Tweedegraadsvergelijkingen <b>BASIS</b>  | 86,76 % | Regel van l'Hôpital <b>EXTRA</b>         | 25,00 % |
| Horner <b>BASIS</b>                      | 64,71 % | Binomium van Newton <b>EXTRA</b>         | 5,88 %  |
| $x^2 + y^2 = r^2$ <b>EXTRA</b>           | 17,65 % | Kansrekening <b>EXTRA</b>                | 73,53 % |
| $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ <b>EXTRA</b> | 48,53 % | Normaal verdeling <b>EXTRA</b>           | 45,59 % |
| e-macht <b>EXTRA</b>                     | 23,53 % | Meervoudige integralen                   | 5,88 %  |
| $\log(x)$ <b>EXTRA</b>                   | 67,65 % | Differentiaalvergelijkingen <b>EXTRA</b> | 8,82 %  |
| $\ln(x)$ <b>EXTRA</b>                    | 36,76 % | Taylor benadering                        | 1,47 %  |
| Matrix rekenen <b>EXTRA</b>              | 39,71 % | Impliciet afleiden                       | 2,94 %  |
| Determinanten <b>EXTRA</b>               | 42,65 % | Partieel afgeleiden <b>EXTRA</b>         | 8,82 %  |
| Eigenwaarden/Eigenvectoren               | 5,88 %  | Trapeziumregel                           | 1,47 %  |
| Afgeleiden <b>EXTRA</b>                  | 82,35 % | Complexe getallen                        | 14,71 % |
| Integratie door substitutie <b>EXTRA</b> | 13,24 % | Grafentheorie                            | 1,47 %  |
| Partiële integratie <b>EXTRA</b>         | 8,82 %  | Zelf bewijzen maken                      | 14,71 % |

Tabel 4: Percentage studenten HW schakel, die de wiskundige onderwerpen gezien hebben in het secundair.

Al deze studenten hebben reeds een bachelordiploma behaald en volgen nu een schakeljaar, om daarna een master HW te starten. Ze hebben het secundair onderwijs al minimum 3 jaar achter zich gelaten. Het gevolg is dat sommige studenten wiskundige onderwerpen, die ze gezien hebben in het secundair onderwijs en aan de hogeschool mogelijk door elkaar gooien. Voor elk wiskundig onderwerp zijn de percentages geziene leerstof iets hoger dan bij de HW-studenten, terwijl de uren wiskunde in het secundair onderwijs vergelijkbaar zijn tussen de schakelstudenten HW en de gewone studenten HW.

Ook hier valt op dat sommige basisleerstofonderdelen slecht scoren. Het extra-onderwerp afgeleiden wordt door meer dan 80% aangeduid als gezien. Ook hier zijn er enkele inconsistenties die ook bij de HW-studenten werden vastgesteld. De reeds

aangehaalde voorbeelden van lineaire vergelijkingen en tweedegraadsvergelijkingen net zoals de inconsistentie bij de vergelijkingen  $x^2 + y^2 = r^2$  en  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  zijn aanwezig. Dit toont opnieuw aan dat deze groep vergeet wat ze vermoedelijk geleerd hebben in het secundair onderwijs.

Dezelfde vragen als de eerstejaars studenten HW werden ook gesteld aan de schakel HW studenten, zie Tabel 5. De resultaten zijn slechter in vergelijking met de eerstejaars studenten HW. Het feit dat veel schakelstudenten in de afgelopen jaren amper wiskunde hebben gehad, zou dit kunnen verklaren.

| Vragen  | Correct | Fout    | Geen Idee |
|---------|---------|---------|-----------|
| Vraag 1 | 8,82%   | 52,94%  | 38,24 %   |
| Vraag 2 | 8,82%   | 27,94%  | 63,24%    |
| Vraag 3 | 0,00%   | 20,59 % | 79,41 %   |
| Vraag 4 | 0,00%   | 0,00%   | 100,00%   |

Tabel 5: Percentage studenten schakel HW, die vragen juist/fout hadden of 'geen idee' aanduiden.

### 3.4 Toegepaste Economische Wetenschappen (TEW)

Aan het onderzoek deden 70 TEW studenten mee. Zij hebben gemiddeld gezien meer uren wiskunde gehad en dus zouden ze ook een grotere voorkennis van wiskunde moeten hebben. Dit zien we ook in Tabel 6 m.b.t. de voorkennis van de studenten TEW.

|                                   |          |                                   |         |
|-----------------------------------|----------|-----------------------------------|---------|
| Stelling van Pythagoras BASIS     | 100,00 % | Verzamelingenleer                 | 34,29 % |
| $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$ BASIS   | 94,29 %  | Goniometrische functies           | 94,29 % |
| Lineaire vergelijkingen BASIS     | 77,14 %  | Limieten EXTRA                    | 97,14 % |
| Tweedegraadsvergelijkingen BASIS  | 100,00 % | Regel van l'Hôpital EXTRA         | 57,14 % |
| Horner BASIS                      | 94,29 %  | Binomium van Newton BASIS         | 71,43 % |
| $x^2 + y^2 = r^2$ BASIS           | 54,29 %  | Kansrekening BASIS                | 94,29%  |
| $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ BASIS | 94,29 %  | Normaal verdeling EXTRA           | 88,57 % |
| e-macht BASIS                     | 71,43 %  | Meervoudige integralen            | 40,00 % |
| $\log(x)$ BASIS                   | 94,29 %  | Differentiaalvergelijkingen EXTRA | 48,57 % |
| $\ln(x)$ BASIS                    | 88,57 %  | Taylor benadering EXTRA           | 20,00 % |
| Matrix rekenen EXTRA              | 85,71 %  | Impliciet afleiden EXTRA          | 17,14 % |
| Determinanten EXTRA               | 68,57 %  | Partieel afgeleiden EXTRA         | 28,57 % |
| Eigenwaarden/Eigenvectoren EXTRA  | 28,57 %  | Trapeziumregel                    | 14,29 % |
| Afgeleiden EXTRA                  | 100,00%  | Complexe getallen                 | 60,00 % |
| Integratie door substitutie EXTRA | 68,57 %  | Grafentheorie                     | 5,71 %  |
| Partiële integratie EXTRA         | 62,86 %  | Zelf bewijzen maken               | 25,71 % |

Tabel 6: Percentage studenten TEW, die de wiskundige onderwerpen gezien hebben in het secundair.

Er is een duidelijke verbetering in de voorkennis te zien in vergelijking met de studenten HW en HW schakel. Wiskundige onderwerpen, die als extra leerstof worden geklasseerd, zijn ook door een groot deel van de studenten TEW al eens gezien in het secundair onderwijs. Dezelfde inconsistenties als bij HW komen hier naar voor, maar het verschil in percentage is kleiner geworden. Dat niet alle studenten weten wat een e-macht of een  $\ln(x)$  functie is, is dan wel weer verrassend. Ook het niet gekend zijn van het binomium van Newton als basisleerstof is verrassend, want dit is één van de fundamenteën van de statistiek.

| Vragen  | Correct | Fout    | Geen Idee |
|---------|---------|---------|-----------|
| Vraag 1 | 51,43%  | 20,00%  | 28,57 %   |
| Vraag 2 | 65,71%  | 11,43%  | 22,86%    |
| Vraag 3 | 0,00%   | 17,14 % | 82,86 %   |
| Vraag 4 | 8,57%   | 2,86%   | 88,57%    |

Tabel 7: Percentage studenten TEW, die vragen juist/fout hadden of 'geen idee' aanduiden.

Bij de resultaten van de 4 open wiskundevragen, die door de studenten van TEW werden beantwoord (zie Tabel 7) is er ook een groot verschil. Er zijn nog altijd 50% van de studenten die een gemakkelijke vraag van het derde secundair en 35% van de studenten die een vraag uit het vierde secundair niet kunnen oplossen. De resultaten voor de vragen uit het vijfde en zesde secundair zijn een klein beetje beter voor de studenten TEW, maar nog altijd niet goed. Dit terwijl l'Hôpital (57,14%) en integratie door substitutie (68,57%) gezien werden door de studenten TEW.

### 3.5 Handelsingenieur en Bedrijfsinformatica (HI/BI)

De studenten uit de richtingen Handelsingenieur (HI) en Bedrijfsinformatica (BI) krijgen samen wiskunde in hun eerstejaars bachelor. Beide groepen krijgen dezelfde wiskundelessen en -examen. Daarom worden beide groepen samen genomen voor dit onderzoek, temeer omdat de definitieve splitsing tussen HI en BI pas in de tweede bachelor gebeurt. Aan het onderzoek deden 84 studenten van HI en BI mee.

|                                   |          |                                   |         |
|-----------------------------------|----------|-----------------------------------|---------|
| Stelling van Pythagoras BASIS     | 100,00 % | Verzamelingenleer BASIS           | 63,10 % |
| $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$ BASIS   | 98,81 %  | Goniometrische functies BASIS     | 95,24 % |
| Lineaire vergelijkingen BASIS     | 98,81 %  | Limieten BASIS                    | 96,43 % |
| Tweedegraadsvergelijkingen BASIS  | 98,81 %  | Regel van l'Hôpital BASIS         | 86,90 % |
| Horner BASIS                      | 98,81 %  | Binomium van Newton BASIS         | 92,86 % |
| $x^2 + y^2 = r^2$ BASIS           | 82,14 %  | Kansrekening BASIS                | 95,24 % |
| $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ BASIS | 98,81 %  | Normaal verdeling BASIS           | 90,48 % |
| e-macht BASIS                     | 92,86 %  | Meervoudige integralen EXTRA      | 30,95 % |
| $\log(x)$ BASIS                   | 97,62 %  | Differentiaalvergelijkingen EXTRA | 64,29 % |
| $\ln(x)$ BASIS                    | 94,05 %  | Taylor benadering EXTRA           | 20,24 % |
| Matrix rekenen BASIS              | 94,05 %  | Impliciet afleiden EXTRA          | 40,48 % |
| Determinanten EXTRA               | 73,81 %  | Partieel afgeleiden EXTRA         | 50,00 % |
| Eigenwaarden/Eigenvectoren EXTRA  | 34,52 %  | Trapeziumregel                    | 8,33 %  |
| Afgeleiden BASIS                  | 98,81 %  | Complexe getallen BASIS           | 83,33 % |
| Integratie door substitutie BASIS | 86,90 %  | Grafentheorie                     | 3,57 %  |
| Partiële integratie EXTRA         | 84,52 %  | Zelf bewijzen maken EXTRA         | 21,43 % |

Tabel 8: Percentage studenten HI/BI, die de wiskundige onderwerpen gezien hebben in het secundair.

De resultaten uit Tabel 8 over de voorkennis van de studenten HI/BI tonen dat veel van de basisonderwerpen gezien zijn. De basisonderwerpen die niet gezien zijn door meer dan 90%, zoals Integratie door substitutie, Regel van l'Hôpital en complexe getallen zitten respectievelijk op 86,90% en 83,33%. Dit is redelijk in de buurt van de 90%. Enkel verzamelingenleer is ondermaats: 63,10%. Verzamelingenleer is geen apart onderwerp in het secundair onderwijs, maar zit verspreid over andere wiskundige topics. De studenten HI/BI hebben 6> uur wiskunde gevolgd zodat we er van uit kunnen gaan dat verzamelingenleer daadwerkelijk gezien is. Dezelfde inconsistentie over de vergelijkingen  $x^2 + y^2 = r^2$  en  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  die aanwezig is bij de andere economische richtingen komt opnieuw naar voor.

| Vragen  | Correct | Fout   | Geen Idee |
|---------|---------|--------|-----------|
| Vraag 1 | 67,86%  | 28,57% | 3,57 %    |
| Vraag 2 | 80,95%  | 16,67% | 2,38%     |
| Vraag 3 | 25,00%  | 34,52% | 40,48 %   |
| Vraag 4 | 33,33%  | 28,57% | 38,10%    |

Tabel 9: Percentage studenten HI/BI, die vragen juist/fout hadden of 'geen idee' aanduiden.

Ook deze groep kreeg dezelfde 4 open vragen (zie Tabel 9). De vragen 1 en 2 uit de tweede graad werden door een meerderheid van de studenten correct beantwoord. De vragen 3 en 4 werden dan weer slecht beantwoord. Dit was redelijk verrassend, omdat alle kennis die nodig is om deze vragen te beantwoorden door meer dan 90% van de studenten gezien was. Zij hebben, in vergelijking met de andere economische richtingen ook het grootste pakket wiskunde gehad in het secundair onderwijs.

### 3.6 Chemie

Aan de bevraging van de studenten chemie deden in totaal 30 eerstejaars bachelorstudenten mee. Het aantal uren wiskunde die de studenten uit die richting hebben gevolgd, is niet eenduidig. Er zijn ongeveer evenveel studenten die 4 uur of 8 uur wiskunde hebben gevolgd in het secundair onderwijs. Er wordt meestal aangeraden dat de studenten 6 uur wiskunde of meer hebben gehad in het secundair onderwijs omdat er in het eerste jaar chemie vooral veel wiskunde, statistiek en fysica aan bod komt.

|                                   |          |                                   |         |
|-----------------------------------|----------|-----------------------------------|---------|
| Stelling van Pythagoras BASIS     | 96,67%   | Verzamelingenleer EXTRA           | 26,67 % |
| $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$ BASIS   | 100,00 % | Goniometrische functies BASIS     | 93,33 % |
| Lineaire vergelijkingen BASIS     | 96,67 %  | Limieten BASIS                    | 90,00 % |
| Tweedegraadsvergelijkingen BASIS  | 96,67 %  | Regel van l'Hôpital BASIS         | 70,00 % |
| Horner BASIS                      | 93,33 %  | Binomium van Newton BASIS         | 56,67 % |
| $x^2 + y^2 = r^2$ BASIS           | 66,67 %  | Kansrekening BASIS                | 93,33 % |
| $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ BASIS | 96,67 %  | Normaal verdeling BASIS           | 76,67 % |
| e-macht BASIS                     | 90,00 %  | Meervoudige integralen EXTRA      | 26,67 % |
| $\log(x)$ BASIS                   | 96,67 %  | Differentiaalvergelijkingen EXTRA | 46,67 % |
| $\ln(x)$ BASIS                    | 90,00 %  | Taylor benadering EXTRA           | 6,67 %  |
| Matrix rekenen BASIS              | 90,00 %  | Impliciet afleiden EXTRA          | 23,33 % |
| Determinanten EXTRA               | 56,67 %  | Partieel afgeleiden EXTRA         | 46,67 % |
| Eigenwaarden/Eigenvectoren EXTRA  | 23,33 %  | Trapeziumregel                    | 6,67 %  |
| Afgeleiden BASIS                  | 96,67 %  | Complexe getallen BASIS           | 76,67 % |
| Integratie door substitutie BASIS | 83,33 %  | Grafentheorie                     | 3,33 %  |
| Partiële integratie EXTRA         | 80,00 %  | Zelf bewijzen maken               | 23,33 % |

Tabel 10: Percentage studenten chemie, die de wiskundige onderwerpen gezien hebben in het secundair.

Uit de gegevens van Tabel 10 over de voorkennis van de chemiestudenten blijkt dat de basiskennis goed scoort, al is dit soms met een beperkte marge. De basisonderwerpen die vooral in de 6-8 uur wiskunde worden gegeven, zijn wel minder gekend dan de basisonderwerpen van de 3 uur wiskunde. De verklaring ligt bij de 23% studenten die een opleiding hebben gevolgd met 3 tot 5 uur wiskunde. Ook hier zien we de inconsistentie dat slechts 66% de vergelijking  $x^2 + y^2 = r^2$  heeft bestudeerd, terwijl de daaropvolgende sinus- en cosinusregel een score van 96% haalt.

| Vragen  | Correct | Fout   | Geen Idee |
|---------|---------|--------|-----------|
| Vraag 1 | 63,33%  | 23,33% | 13,33 %   |
| Vraag 2 | 56,67%  | 33,33% | 10,00%    |
| Vraag 3 | 10,00%  | 36,67% | 53,33%    |
| Vraag 4 | 13,33%  | 30,00% | 56,67%    |

Tabel 11: Percentage studenten chemie, die vragen juist/fout hadden of 'geen idee' aanduiden.

Uit Tabel 11 blijkt dat vragen 1 en 2 uit de tweede graad door een meerderheid van de studenten correct werden beantwoord. De vragen 3 en 4 werden dan weer slecht beantwoord.

### 3.7 Fysica

Aan het onderzoek deden 29 studenten fysica mee. Uit Tabel 12 blijkt dat de voorkennis van de wiskundeleerstof zeer goed is. Enkel de regel van l'Hôpital, zeer nipt, en verzamelingenleer zijn onder de 90% voor de basis. Het onderdeel verzamelingenleer kan mogelijks verklaren waarom studenten fysica het moeilijker hebben met het vak basisbegrippen, een eerstejaars bachelor vak voor wiskunde en fysica, waar verzamelingenleer en het maken van bewijzen een belangrijke plaats krijgen. Er zijn ook onderwerpen gezien, die als extra leerstof worden beschouwd. Dit heeft vermoedelijk te maken met het feit dat deze onderwerpen soms in de 6-8 uur wiskunde richtingen gezien worden.

|                                   |          |                                   |          |
|-----------------------------------|----------|-----------------------------------|----------|
| Stelling van Pythagoras BASIS     | 100,00 % | Verzamelingenleer BASIS           | 68,97 %  |
| $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$ BASIS   | 100,00 % | Goniometrische functies BASIS     | 100,00 % |
| Lineaire vergelijkingen BASIS     | 100,00 % | Limieten BASIS                    | 100,00 % |
| Tweedegraadsvergelijkingen BASIS  | 100,00 % | Regel van l'Hôpital BASIS         | 89,66 %  |
| Horner BASIS                      | 96,55 %  | Binomium van Newton BASIS         | 96,55 %  |
| $x^2 + y^2 = r^2$ BASIS           | 96,55 %  | Kansrekening BASIS                | 96,55 %  |
| $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ BASIS | 100,00 % | Normaal verdeling BASIS           | 93,10 %  |
| e-macht BASIS                     | 96,55 %  | Meervoudige integralen EXTRA      | 37,93 %  |
| $\log(x)$ BASIS                   | 100,00 % | Differentiaalvergelijkingen EXTRA | 51,72 %  |
| $\ln(x)$ BASIS                    | 96,55 %  | Taylor benadering EXTRA           | 6,90 %   |
| Matrix rekenen BASIS              | 100,00 % | Impliciet afleiden EXTRA          | 24,14 %  |
| Determinanten EXTRA               | 89,66 %  | Partieel afgeleiden EXTRA         | 27,59 %  |
| Eigenwaarden/Eigenvectoren EXTRA  | 58,62 %  | Trapeziumregel                    | 24,14 %  |
| Afgeleiden BASIS                  | 100,00 % | Complexe getallen BASIS           | 96,55 %  |
| Integratie door substitutie BASIS | 96,55 %  | Grafentheorie                     | 10,34 %  |
| Partiële integratie EXTRA         | 93,10 %  | Zelf bewijzen maken EXTRA         | 17,24 %  |

Tabel 12: Percentage studenten fysica, die de wiskundige onderwerpen gezien hebben in het secundair.

Uit Tabel 13 blijkt dat de studenten fysica de 4 vragen goed opgelost hebben. De vragen uit de tweede graad zijn bijna door alle studenten perfect beantwoord en de vragen uit de derde graad werden ook redelijk goed beantwoord. De foute antwoorden van de berekeningen van sommige studenten waren de verwachte fouten. De studenten fysica weten dat ze veel wiskunde krijgen in hun opleiding en spitsen zich dus ook toe om voor dit vak goed te scoren. Misschien zorgt de verplichte ijkingstoets wiskunde er voor dat toekomstige studenten, die een slecht resultaat hebben gehaald, niet met de opleiding zijn gestart en dus enkel de studenten die zeer sterk zijn in wiskunde overblijven. Ook kan het zijn dat studenten, die geïnteresseerd/ goed zijn in fysica automatisch ook beter zijn in wiskunde.

| Vragen  | Correct | Fout   | Geen Idee |
|---------|---------|--------|-----------|
| Vraag 1 | 93,10%  | 6,90%  | 0,00 %    |
| Vraag 2 | 100,00% | 0,00%  | 0,00%     |
| Vraag 3 | 65,52%  | 10,34% | 20,69%    |
| Vraag 4 | 86,21%  | 3,45%  | 6,90%     |

Tabel 13: Percentage studenten fysica, die vragen juist/fout hadden of 'geen idee' aanduiden.

### 3.8 Wiskunde

Aan het onderzoek deden 26 studenten van de richting wiskunde mee. Op basis van de voorkennis, Tabel 14, merken we op dat alles wat we als basiskennis bestempelen als gezien wordt aangeduid. Ook een redelijk aantal items van de extra leerstof is door 100% van alle studenten als gekend bestempeld. Net zoals bij fysica zijn een aantal wiskundige onderwerpen, die pas aan de universiteit worden gedoceerd, reeds gekend.

|                                   |          |                                   |          |
|-----------------------------------|----------|-----------------------------------|----------|
| Stelling van Pythagoras BASIS     | 100,00 % | Verzamelingenleer BASIS           | 92,31 %  |
| $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$ BASIS   | 100,00 % | Goniometrische functies BASIS     | 100,00 % |
| Lineaire vergelijkingen BASIS     | 100,00 % | Limieten BASIS                    | 100,00 % |
| Tweedegraadsvergelijkingen BASIS  | 100,00 % | Regel van l'Hôpital BASIS         | 96,15 %  |
| Horner BASIS                      | 100,00 % | Binomium van Newton BASIS         | 100,00 % |
| $x^2 + y^2 = r^2$ BASIS           | 96,15 %  | Kansrekening BASIS                | 100,00 % |
| $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ BASIS | 96,15 %  | Normaal verdeling BASIS           | 92,31 %  |
| e-macht BASIS                     | 100,00 % | Meervoudige integralen EXTRA      | 19,23 %  |
| $\log(x)$ BASIS                   | 100,00 % | Differentiaalvergelijkingen EXTRA | 57,69 %  |
| $\ln(x)$ BASIS                    | 100,00 % | Taylor benadering EXTRA           | 7,69 %   |
| Matrix rekenen BASIS              | 100,00 % | Impliciet afleiden EXTRA          | 19,23 %  |
| Determinanten EXTRA               | 88,46 %  | Partieel afgeleiden EXTRA         | 19,23 %  |
| Eigenwaarden/Eigenvectoren EXTRA  | 42,31 %  | Trapeziumregel                    | 15,38 %  |
| Afgeleiden BASIS                  | 100,00 % | Complexe getallen BASIS           | 100,00 % |
| Integratie door substitutie BASIS | 100,00 % | Grafentheorie                     | 26,92 %  |
| Partiële integratie EXTRA         | 100,00 % | Zelf bewijzen maken EXTRA         | 34,62 %  |

Tabel 14: Percentage studenten wiskunde, die de wiskundige onderwerpen gezien hebben in het secundair.

Het spreekt vanzelf dat de studenten wiskunde de beste score hebben op hun vragen 1-4, zie Tabel 15. De eerste 2 vragen zijn zelfs perfect beantwoord door alle studenten wiskunde. De overige 2 vragen werden door 73,08% juist beantwoord, de rest van de fout ingevulde vragen bestond uit kleine en verwachte fouten. Het is natuurlijk niet verbazingwekkend, dat studenten, die wiskunde willen studeren, gepassioneerd zijn voor het vak.

| Vragen  | Correct | Fout   | Geen Idee |
|---------|---------|--------|-----------|
| Vraag 1 | 100,00% | 0,00%  | 0,00 %    |
| Vraag 2 | 100,00% | 0,00%  | 0,00%     |
| Vraag 3 | 73,08%  | 23,08% | 3,85%     |
| Vraag 4 | 73,08%  | 23,08% | 3,85%     |

Tabel 15: Percentage studenten wiskunde, die vragen juist/fout hadden of 'geen idee' aanduiden.

### 3.9 IJkingstoets wiskunde

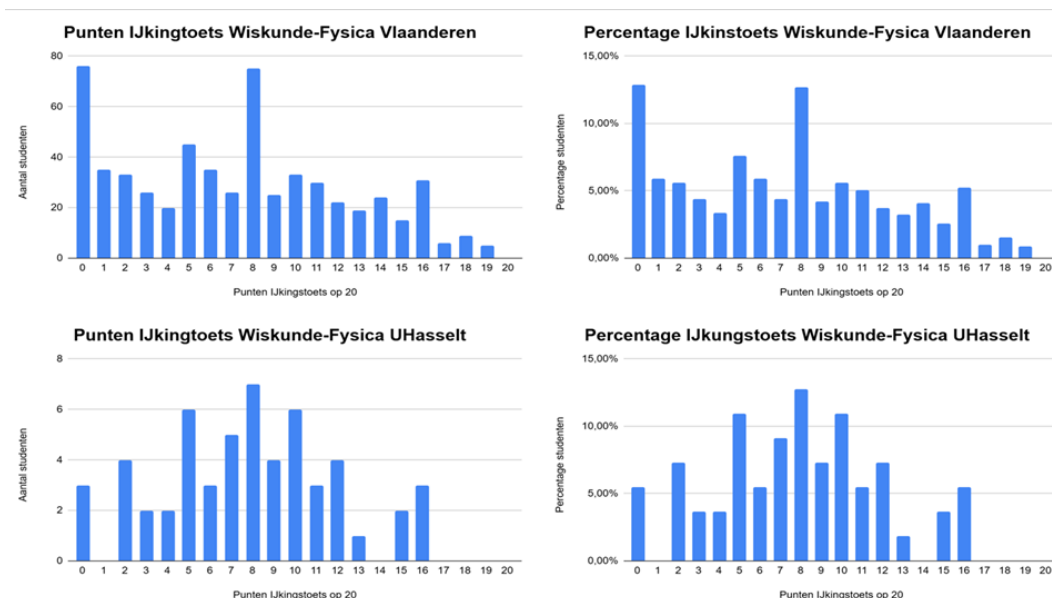
De ijkingsstoets wiskunde is verplicht voor de studenten die de opleidingen wiskunde of fysica willen volgen. De ijkingsstoets voor wiskunde-fysica is identiek aan de ijkingsstoets voor burgerlijk ingenieur. Zoals reeds vermeld in de probleemstelling is slagen voor de ijkingsstoets niet verplicht [1, 8]. De toets bestaat uit 30 meerkeuzevragen met steeds vier antwoordopties waarvan je er één moet kiezen. Er is geen mogelijkheid om een vraag blanco te laten. Je moet tijdens de toets dus geen strategische keuzes maken of je een vraag al dan niet beantwoordt: je lost gewoon elke vraag op naar best vermogen. Hierdoor verdwijnt er niet alleen heel wat stress, maar wie niet geneigd is om risico's te nemen, kan zo ook niet meer benadeeld worden.

Het resultaat van de ijkingsstoets is een score op 20 voor het geheel van de toets. Deze score wordt berekend met de methode van hogere cesuur. De hogere cesuur met correctie van score zorgt ervoor dat je score wordt aangepast zodat de cesuur overeenkomt met de helft van het maximaal aantal punten. De volgende formule wordt gebruikt:

$$\text{score} = \left( \frac{4}{3} (\# \text{ Vragen juist}) - \frac{1}{3} \# \text{ Vragen} \right) \frac{\text{Max score}}{\# \text{ Vragen}}$$

De totaalscore voor de ijkingsstoets wordt herrekend naar een maximum van 20 en afgerond tot op een natuurlijk getal. Om te slagen voor de ijkingsstoets wiskunde en fysica moet je minstens 10/20 behalen, d.w.z. minstens 19 van de 30 vragen juist beantwoorden [7].

Aan de ijkingsstoets in de zomer van 2024 deden in totaal 590 studenten mee over heel Vlaanderen. Van deze groep was 32,88% geslaagd op de ijkingsstoets. In totaal startten 55 studenten aan de opleidingen wiskunde en fysica op de UHasselt. In de volgende grafieken zien we de vergelijking in punten en percentage tussen het Vlaamse niveau en de resultaten voor de studenten aan de UHasselt [7].



Het grote verschil tussen beide groepen is dat de extremen in puntenverdeling (hoogste en laagste scores) ondervetegenwoordigd zijn op de UHasselt. Dit heeft vermoedelijk te maken met het feit, dat deelnemers die laag scoorden niet gestart zijn aan de opleiding. Het feit dat de hoge scores amper voorkomen, heeft te maken dat maar 20 deelnemers over gans Vlaanderen 17/20 of meer hebben behaald en dus is de kans klein dat er veel

van deze studenten in de groep van slechts 55 studenten zitten op de UHasselt.

Als de gemiddelden vergeleken worden, zien we dat de eerste bachelor wiskundestudenten aan de UHasselt een gemiddelde van 8,46/20 en een slagingspercentage van 38,46% hebben. Ter vergelijking: de eerste bachelor fysicastudenten aan de UHasselt hebben een gemiddelde van 7,21/20 en een slagingspercentage van 31,03%. De combinatie eerste bachelorstudenten wiskunde en fysica aan de UHasselt hebben een gemiddelde van 7,8/20 en een slagingspercentage van 34,55%. De uitslag voor gans Vlaanderen ligt op een gemiddelde van 7,27/20 en een slagingspercentage van 32,88%. De cijfers voor de studenten op de UHasselt zijn iets hoger dan de Vlaamse cijfers.

De ijkingstoetsen hebben als hoofddoel om toekomstige studenten een beter inzicht te geven of ze de opleiding aankunnen voordat ze van start gaan. We zouden dus verwachten dat slechts 38,46% van de studenten Wiskunde zou slagen voor de eerste geëxamineerde wiskundevakken aan de universiteit. Dit is niet het geval. Tabel 16 toont de slagingsresultaten voor de vakken basisbegrippen en calculus 1 waarvan de studenten op het einde van het eerste kwartiel een examen krijgen. Uit Tabel 16 blijkt dat het slagingspercentage niet te vergelijken is met die van de ijkingstoets.

|             | Basisbegrippen | Calculus 1 | ijkingstoets |
|-------------|----------------|------------|--------------|
| Geslaagd    | 95,65%         | 65,22%     | 38,46 %      |
| Tolereren   | 00,00%         | 21,74%     | 26,92 %      |
| Onvoldoende | 4,35%          | 13,04%     | 34,62%       |

Tabel 16: Percentage studenten wiskunde geslaagd op vakken kwartiel 1 en ijkingstoets.

Hetzelfde fenomeen vinden we bij de studenten fysica, zie Tabel 18. Hoewel de resultaten voor fysica in het algemeen minder goed zijn dan die voor wiskunde, is er nog altijd geen goede correlatie tussen de slagingspercentages. Dit blijft ook zo wanneer we kijken naar het gemiddelde van de twee vakken. Het vak calculus 1 voor fysica lijkt een betere indicatie te geven van de slagingspercentages. Maar zelfs daar zit er een verschil van meer dan 10% in vergelijking met de ijkingstoets. We kunnen hieruit duidelijk concluderen dat de ijkingstoets een slechte correlatie geeft tussen het slagen op de toets en de punten van de eerste examenvakken wiskunde aan de universiteit.

|             | Basisbegrippen | Calculus 1 | ijkingstoets |
|-------------|----------------|------------|--------------|
| Geslaagd    | 56,52%         | 43,48%     | 31,03 %      |
| Tolereren   | 21,74%         | 8,70%      | 13,79 %      |
| Onvoldoende | 21,74%         | 47,83%     | 55,17%       |

Tabel 17: Percentage studenten fysica geslaagd op vakken kwartiel 1 en ijkingstoets.

|             | Basisbegrippen | Calculus 1 | ijkingstoets UHasselt | ijkingstoets Vlaanderen |
|-------------|----------------|------------|-----------------------|-------------------------|
| Geslaagd    | 76,09%         | 54,35%     | 34,55 %               | 32,88 %                 |
| Tolereren   | 10,87%         | 15,22%     | 20,00 %               | 16,95 %                 |
| Onvoldoende | 13,04%         | 30,43%     | 45,45 %               | 50,17 %                 |

Tabel 18: Percentage studenten wiskunde-fysica geslaagd op vakken kwartiel 1 en ijkingstoets.

## 4 Discussie en Conclusie

Hier zullen de data uit de vorige sectie kritisch besproken worden en daar conclusies en mogelijke verdere onderzoeksvragen aan gekoppeld worden.

1. De stereotypen over het aantal uren wiskunde in het secundair onderwijs van de studenten economie (HW,TEW,HI/BI) worden bevestigd. Als de studenten in het secundair onderwijs 4 uur of minder wiskunde hebben gekregen en voor het vak goede resultaten behaalden, is de richting HW voor hen geschikt. Ook voor studenten met meerdere uren wiskunde, maar met zwakkere resultaten is HW de ideale richting. Wie minstens 6 uur wiskunde heeft gevolgd, maar minder goede resultaten scoorde, kan best de studie TEW aanvatten. Studenten die meerdere uren wiskunde studeerden en goede resultaten voor het vak wiskunde behaalden, kunnen de richtingen HI of BI volgen. Studenten BI/BI hebben meer wiskundige onderwerpen gezien als basis, dan studenten TEW en HW. Het verschil tussen TEW en HW is niet de inhoud, maar wel de tijd. Studenten TEW zien dezelfde leerstof als HW, maar in een veel sneller tempo en de examenvragen van TEW zijn van een moeilijker niveau. Wiskunde en statistiek worden ook gezien als schiftingsvakken voor de opleiding. Het gevolg is dat er een soort van watervalstelsel ontstaat: studenten beginnen in de wiskundig moeilijker richting HI/BI om dan naar TEW of naar HW overstappen als de resultaten tegen vallen.

2. Het feit dat de richtingen wiskunde en fysica bijna alle studenten 6-8 uren wiskunde hebben gevolgd is geen verrassing, zeker en vast niet voor de richting wiskunde. Studenten fysica weten dat ze veel wiskundevakken hebben en dat ze in het eerste jaar voor veel vakken met wiskundestudenten samen les volgen. Dit schrikt vermoedelijk een deel studenten af die minder uren wiskunde hebben gehad. Zoals reeds besproken is chemie een meer heterogene groep, omdat chemie veel studenten aantrekt uit verschillende richtingen met veel of weinig wiskunde.

3. Bij de basiskennis van alle economische richtingen en chemie valt op dat er inconsistenties zijn bij de voorkennis van al deze groepen. Het verschil in percentage bij de voorkennis tussen de vergelijkingen  $x^2 + y^2 = r^2$  en  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , alsook het kunnen oplossen van eerste/lineaire en tweedegraadsvergelijkingen, geeft aan dat de studenten van deze richtingen vermoedelijk niet de basiskennis onthouden hebben of de naamgeving vergeten zijn van wiskundige onderwerpen die sterk op elkaar lijken. Alle economische richtingen en chemie scoren onvoldoende op de 4 vragen, hoewel ze aangegeven hebben dat ze de inhoud wel gezien hadden in het secundair onderwijs. De enige conclusie dat we hieruit kunnen trekken is dat de studenten vergeten zijn hoe ze basiswiskundeoefeningen uit het secundair onderwijs moeten oplossen. Leerlingen studeren voor toetsen en examens en bewijzen door hun goede resultaten dat ze de leerstof begrijpen. Helaas gebruiken ze die kennis niet verder meer en wordt het vergeten.

4. De studenten wiskunde en fysica lijken veel minder last te hebben van het vergeten van het oplossen van wiskundeoefeningen. Dit kan te maken hebben met het feit dat studenten wiskunde en fysica meer gemotiveerd zijn voor het vak wiskunde en dus beter de inhoud en de toepassing ervan onthouden. De verplichte ijkingsstoets blijkt voor de studenten van de UHasselt geen goede graadmeter te zijn voor de slagingspercentages. Als ongeveer 1 op de 3 studenten slaagt op de ijkingsstoets en 2 op de 3 slagen voor de eerste examens aan de universiteit is het duidelijk dat het een slechte graadmeter is. De ijkingsstoets voor wiskunde en fysica is dezelfde als die voor burgerlijk ingenieur. De ijkingsstoets van burgerlijk ingenieur is ouder dan die van wiskunde en fysica en de vragen zijn dan eerder op die opleiding gericht. Uit een studie van burgerlijk ingenieur [17] blijkt dat 76% van de deelnemers die een hoge score

haalde op de ijkingsstoets, slagen in het eerste jaar bachelor. Er zou dus een meer theoretisch wiskundige ijkingsstoets moeten komen voor wiskunde en fysica.

#### **Verdere onderzoeksvragen:**

- Is het verschil in slagingspercentage ijkingsstoetsen en daadwerkelijke slagingspercentage een Vlaams fenomeen?
- Is er een groot verschil tussen de 3 leerplannen wiskunde?
- Welk leerplan sluit het best aan bij de verwachte voorkennis om in het hoger onderwijs met succes het vak wiskunde te kunnen volgen?
- Wat zijn de slagingskansen in TEW, HI en Bi van studenten die een richting met minder uren wiskunde hebben gevolgd?
- Wat is de impact van de resultaten van de ijkingsstoets op de studenten die de richting fysica of wiskunde willen volgen?

## **5 Ontwerp**

Uit de paper blijkt dat studenten in de meeste gevallen, uitgezonderd HW (schakel) de onderwerpen uit de leerplannen voor wiskunde gezien hebben: de eindtermen zijn behaald. De studenten vergeten echter hun voorkennis en de toepassing ervan. Dit is een reden om de septembercursus voor de studenten van de richting HW aan de UHasselt te herzien. Het doel is om de oefeningen beter op de geziene voorkennis af te stellen en deze voor deze richting noodzakelijke kennis terug in te oefenen. De volgende zaken werden verbeterd aan het originele document: Zie bijlage 6.4.

- De theorie wordt herhaald en is toegevoegd aan het document.
- Er zijn extra oefeningen bijgevoegd.
- Er is aan de hand van de steekproef over de voorkennis extra theorie en oefeningen bijgevoegd, die er origineel niet bij zat.

## Referenties

- [1] Ijkingstoets.be - informatie over starttoetsen en ijkingstoetsen in vlaanderen. <https://www.ijkingstoets.be/>, 2025. Geraadpleegd op 16 april 2025.
- [2] Ivo JM Arnold and Jerry T Straten. Motivation and math skills as determinants of first-year performance in economics. *The Journal of Economic Education*, 43(1):33–47, 2012.
- [3] Jennifer L Brown, Glennelle Halpin, and Gerald Halpin. Relationship between high school mathematical achievement and quantitative gpa. *Higher Education Studies*, 5(6):1–8, 2015.
- [4] Koen Declercq and Frank Verboven. Zijn toelatingsvoorwaarden in het hoger onderwijs wenselijk? *Leuvense economische standpunten*, 2014(140):1–21, 2014.
- [5] GO! Onderwijs van de Vlaamse Gemeenschap. Doorstroomfinaliteit. <https://pro.g-o.be/themas/leerplannen/derde-graad-secundair-onderwijs/doorstroomfinaliteit/>, 2025. Geraadpleegd op 27 mei 2025.
- [6] Universiteit Hasselt. Voorkennis wiskunde voor leerlingen uit het gemeenschapsonderwijs (go) met minstens 6 uur wiskunde. <https://sites.google.com/uhasselt.be/platformwiskunde/leerplatform/voorkennis/go-6u?authuser=1>, 2025. Geraadpleegd op 16 april 2025.
- [7] IJkingstoets. Cesuur. <https://www.ijkingstoets.be/nl/cesuur>, 2025. Geraadpleegd op 16 april 2025.
- [8] IJkingstoets. Resultaat van de ijkingstoets wiskunde (en data science). <https://www.ijkingstoets.be/opleidingen/wiskunde/resultaat>, 2025. Geraadpleegd op 16 april 2025.
- [9] IJkingstoets.be. Voorbereiding - opleiding chemie. <https://www.ijkingstoets.be/opleidingen/chemie/voorbereiding>, 2025. Geraadpleegd op 17 april 2025.
- [10] KU Leuven. Slaagcijfers. <https://www.kuleuven.be/luci/slaagcijfers/>, 2025. Geraadpleegd op 13 mei 2025.
- [11] Girija Mallik and Parikshit Basu. Does high school mathematics improve student learning in economics in the university? *International Journal of Learning*, 16(4):515–520, 2009.
- [12] Girijasankar Mallik and Sriram Shankar. Does prior knowledge of economics and higher level mathematics improve student learning in principles of economics? *Economic Analysis and Policy*, 49:66–73, 2016.
- [13] Ella Meyvisch. Kritiek op app uhasselt. <https://www.veto.be/onderwijs/kritiek-op-app-uhasselt/113311>, March 2021. Geraadpleegd op 13 mei 2025.
- [14] Learning analytics van de leerpaden Newton and EN Isaac. Online remediëring wiskunde aan de ugent onder de loep.
- [15] Vinsent Nollet, Daan Delespaul, and Ana Van Liedekerke. Wordt de afstand tussen het hoger en secundair onderwijs stilaan onoverbrugbaar? <https://www.veto.be/onderwijs/wordt-de-afstand-tussen-het-hoger-en-secundair-onderwijs-stilaan-onoverbrugbaar/254969>, April 2019. Geraadpleegd op 13 mei 2025.
- [16] PISA Vlaanderen. Vlaamse resultaten PISA 2022. <https://www.pisa.ugent.be/resultaten/pisa-2022/vlaamse-resultaten>, 2023. Geraadpleegd op 17 april 2025.

- [17] Redactie De Morgen. Ijkingstoets burgerlijk ingenieur goede voorspeller van later studiesucces. <https://www.demorgen.be/nieuws/ijkingstoets-burgerlijk-ingenieur-goede-voorspeller-van-later-studiesucces-bf4df045/>, 2019. Geraadpleegd op 21 april 2025.
- [18] Vlaamse overheid. Examenvragen. <https://toelatingsexamensvlaanderen.be/voorbereiding/proefexamen/examenvragen>, 2025. Geraadpleegd op 13 mei 2025.
- [19] Vlaamse Overheid. Vind jouw ijkingstoets. <https://www.ijkingstoets.be/vindjouwijkingstoets>, 2025. Geraadpleegd op 13 mei 2025.
- [20] Katholiek Onderwijs Vlaanderen. Vakken en leerplannen - derde graad secundair onderwijs. <https://pro.katholiekonderwijs.vlaanderen/vakken-en-leerplannen?tab=derdegraad>, 2025. Geraadpleegd op 27 mei 2025.
- [21] Wiskundeplan. Leerplan 3e graad 6-8u. <https://wiskundeplan.be/leerplan-3e-graad-6-8u/>, 2025. Geraadpleegd op 27 mei 2025.

## 6 Bijlagen

### 6.1 Bijlage 1: Test voorkennis wiskunde voor HW, TEW, HI/BI

|                                   |
|-----------------------------------|
| VOORKENNIS WISKUNDE VOOR ECONOMIE |
|-----------------------------------|

Voornaam: ..... Familiennaam:.....

Geboortjaar:..... Geslacht: M / V Provincie:.....

Welke opleiding op de UHasselt volgt u?

☐ HW ☐ TEW ☐ BI/BI

In welk jaar zit u?

☐ 1ste Bachelor ☐ 2de/3debachelor ☐ Schakel Student ☐ .....

Hoeveel uren wiskunde had u in het laatste jaar van uw secundair?

☐ <2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ >8

Welk onderwijstype heb je gevolgd op jouw school?

☐ ASO ☐ KSO ☐ TSO ☐ BSO ☐ Andere

Welke opleiding volgde u in het secundair?

Naam opleiding: .....

Welke van de volgende wiskunde onderdelen kent u? Duid aan.

☐ Stelling van Pythagoras

☐  $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$

☐ Lineaire vergelijkingen

☐ Tweedegraadsvergelijkingen

☐ Horner

☐  $x^2 + y^2 = r^2$

☐  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

☐ e-macht

☐  $\log(x)$

☐  $\ln(x)$

☐ Matrix rekenen

☐ Determinanten

☐ Eigenwaarden/Eigenvectoren

☐ Afgeleiden

☐ Integratie door substitutie

☐ Partiële integratie

☐ Verzamelingenleer

☐ Goniometrische functies

☐ Limieten

☐ Regel van l'Hôpital

☐ Binomium van Newton

☐ Kansrekening

☐ Normaal verdeling

☐ Meervoudige integralen

☐ Differentiaalvergelijkingen

☐ Taylor benadering

☐ Impliciet afleiden

☐ Partieel afgeleiden

☐ Trapeziumregel

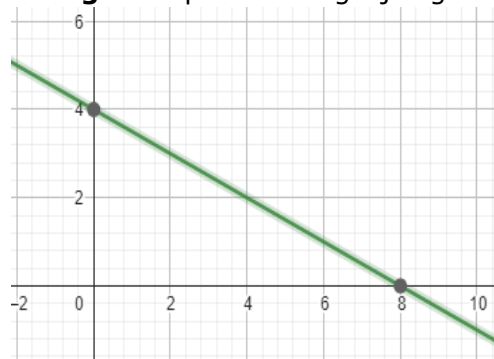
☐ Complexe getallen

☐ Grafentheorie

☐ Zelf bewijzen maken

Beantwoord de volgende vragen. Indien u geen idee hebt hoe dit op te lossen omcirkel: GEEN IDEE.

**Vraag 1:** Bepaal de vergelijking van de volgende functie.



GEEN IDEE/ ANTW:

**Vraag 2:** Zoek alle nulpunten van  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

GEEN IDEE/ ANTW:

**Vraag 3:** Bepaal volgende limiet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)}$

GEEN IDEE/ ANTW:

**Vraag 4:** Los de volgende integraal op:  $\int \frac{x}{4-x^2} dx$

GEEN IDEE/ANTW:

## 6.2 Bijlage 2: Test voorkennis wiskunde voor chemie

|                                 |
|---------------------------------|
| VOORKENNIS WISKUNDE VOOR CHEMIE |
|---------------------------------|

Voornaam: ..... Familienaam:.....

Geboortejaar:..... Geslacht: M / V Provincie:.....

In welk jaar zit u?

☐ 1ste Bachelor ☐ 2de/3de bachelor ☐ Schakel Student ☐ .....

Hoeveel uren wiskunde had u in het laatste jaar van uw secundair?

☐ <2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ >8

Welk onderwijstype heb je gevolgd op jouw school?

☐ ASO ☐ KSO ☐ TSO ☐ BSO ☐ Andere

Welke opleiding volgde u in het secundair?

Naam opleiding: .....

Welke van de volgende wiskunde onderdelen kent u? Duid aan.

☐ Stelling van Pythagoras

☐  $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$

☐ Lineaire vergelijkingen

☐ Tweedegraadsvergelijkingen

☐ Horner

☐  $x^2 + y^2 = r^2$

☐  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

☐ e-macht

☐  $\log(x)$

☐  $\ln(x)$

☐ Matrix rekenen

☐ Determinanten

☐ Eigenwaarden/Eigenvectoren

☐ Afgeleiden

☐ Integratie door substitutie

☐ Partiële integratie

☐ Verzamelingenleer

☐ Goniometrische functies

☐ Limieten

☐ Regel van l'Hôpital

☐ Binomium van Newton

☐ Kansrekening

☐ Normaal verdeling

☐ Meervoudige integralen

☐ Differentiaalvergelijkingen

☐ Taylor benadering

☐ Impliciet afleiden

☐ Partieel afgeleiden

☐ Trapeziumregel

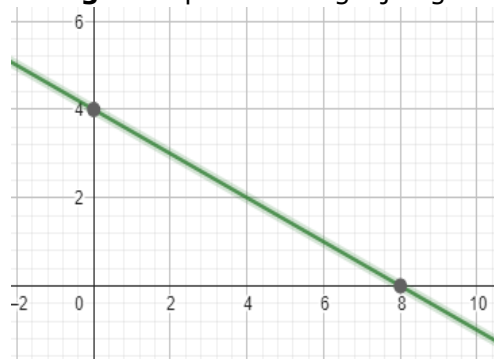
☐ Complexe getallen

☐ Grafentheorie

☐ Zelf bewijzen maken

Beantwoord de volgende vragen. Indien u geen idee hebt hoe dit op te lossen omcirkel: GEEN IDEE.

**Vraag 1:** Bepaal de vergelijking van de volgende functie.



GEEN IDEE/ ANTW:

**Vraag 2:** Zoek alle nulpunten van  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

GEEN IDEE/ ANTW:

**Vraag 3:** Bepaal volgende limiet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)}$

GEEN IDEE/ ANTW:

**Vraag 4:** Los de volgende integraal op:  $\int \frac{x}{4-x^2} dx$

GEEN IDEE/ANTW:

### 6.3 Bijlage 3: Test voorkennis wiskunde voor wiskunde en fysica

|                                          |
|------------------------------------------|
| VOORKENNIS WISKUNDE VOOR WISKUNDE/FYSICA |
|------------------------------------------|

Voornaam: ..... Familiennaam:.....

Geboortjaar:..... Geslacht: M / V Provincie:.....

Welke opleiding op de UHasselt volgt u? ☐ Fysica ☐ Wiskunde

In welk jaar zit u?

☐ 1ste Bachelor ☐ 2de/3de bachelor ☐ Schakel Student ☐ .....

Hoeveel uren wiskunde had u in het laatste jaar van uw secundair?

☐ <2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ >8

Welk onderwijstype heb je op jouw school gevolgd?

☐ ASO ☐ KSO ☐ TSO ☐ BSO ☐ Andere

Naam Middelbare School: .....

Naam middelbare opleiding:.....

Hoeveel punten haalde u op de ijkingsstoets wiskunde

...../20 Niet deelgenomen

Welke van de volgende wiskunde onderdelen kent u? Duid aan.

☐ Stelling van Pythagoras

☐  $\sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$

☐ Lineaire vergelijkingen

☐ Tweedegraadsvergelijkingen

☐ Horner

☐  $x^2 + y^2 = r^2$

☐  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

☐ e-macht

☐  $\log(x)$

☐  $\ln(x)$

☐ Matrix rekenen

☐ Determinanten

☐ Eigenwaarden/Eigenvectoren

☐ Afgeleiden

☐ Integratie door substitutie

☐ Partiële integratie

☐ Verzamelingenleer

☐ Goniometrische functies

☐ Limieten

☐ Regel van l'Hôpital

☐ Binomium van Newton

☐ Kansrekening

☐ Normaal verdeling

☐ Meervoudige integralen

☐ Differentiaalvergelijkingen

☐ Taylor benadering

☐ Impliciet afleiden

☐ Partieel afgeleiden

☐ Trapeziumregel

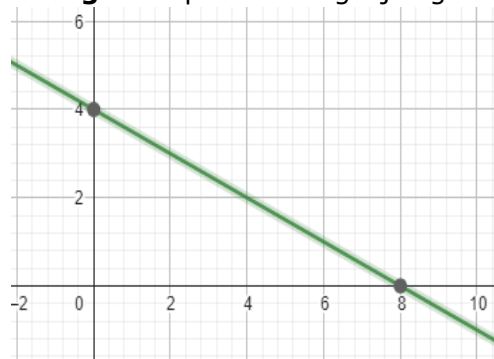
☐ Complexe getallen

☐ Grafentheorie

☐ Zelf bewijzen maken

Beantwoord de volgende vragen. Indien u geen idee hebt hoe dit op te lossen omcirkel: GEEN IDEE.

**Vraag 1:** Bepaal de vergelijking van de volgende functie.



GEEN IDEE/ ANTW:

**Vraag 2:** Zoek alle nulpunten van  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

GEEN IDEE/ ANTW:

**Vraag 3:** Bepaal volgende limiet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)}$

GEEN IDEE/ ANTW:

**Vraag 4:** Los de volgende integraal op:  $\int \frac{x}{4-x^2} dx$

GEEN IDEE/ANTW:

## 6.4 Bijlage 4: Septemburcursus HW

### Doelstelling van mijn creatief ontwerp:

Op de volgende pagina's kan men de aanpassingen van de bestaande septemburcursus voor de richting Handelswetenschappen (HW) lezen. Het originele document bestond enkel uit een lijst van oefeningen. De aanpassingen zijn gebaseerd op de vaststellingen uit de uitgevoerde steekproef en mijn eigen ervaring met het begeleiden van die studenten. We beogen door deze aanpassingen de studenten HW beter voor te bereiden om het nieuwe academiejaar te kunnen starten.

**Vaststellingen:** Welke fouten worden frequent door de studenten gemaakt?

### Steekproef:

1. Telfouten.
2. Pas de rekenregels juist toe:
  - Haakjes correct wegwerken.
  - Let op bij min-tekens om een vergelijking op te lossen

### Werkervaring:

1. Didactisch:
  - Rekenfouten
  - Leerlingen geven snel op.
2. Pedagogisch:
  - Schrijf duidelijk en gestructureerd.
  - Blijven oefenen.

Aan deze lijst van oefeningen werden nu de theorie en ook uitbreidingsoefeningen toegevoegd. Het wiskundeplatform van de UHasselt, [6] werd gebruikt om de theorie aan te passen. Ook is er extra herhalingsleerstof toegevoegd, gebaseerd op de gemiddelde voorkennis van de studenten HW.

Studieleidraad

Septembercursus Wiskunde

**Bachelor Handelswetenschappen**

**Universiteit Hasselt**

# Dag 1

## *Zelfstudie-opdrachten*

---

### Rekenen met letters & Distributiviteit

Stel dat je drie getallen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  hebt. Een typische bewerking die vaak voorkomt is  $a \cdot (b + c)$ . De manier waarop we deze haakjes uitwerken noemen we de **distributieve eigenschap** en gaat als volgt

#### Eigenschap 1.1

#### Distributiviteit

Voor alle reële getallen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  geldt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{en} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Er kan ook een minteken optreden. Je voert de regel op dezelfde manier uit maar je neemt ook het minteken in rekening. Als je je hier vaak in vergist, kan je een tussenstap maken door extra haakjes toe te voegen

#### Eigenschap 1.2

#### Distributiviteit

Voor alle reële getallen  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  geldt

$$a \cdot (b - c) = a \cdot (b + (-c)) = a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

#### !! Let op !!

Distributiviteit kan je enkel toepassen als er tussen de haakjes **een som** of **een verschil** voorkomt. Merk op dat

$$4 \cdot (x \cdot y) \neq (4x) \cdot (4y)$$

want dit is een veelgemaakte fout. Dit kan je nagaan door eenvoudige getallen in te vullen zoals  $x = 1$  en  $y = 2$ . Zo krijg je

$$4 \cdot (1 \cdot 2) = 8 \neq 32 = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 2)$$

**Eigenschap 1.3****Merkwaardige Producten**

Voor alle getallen  $a, b \in \mathbb{R}$  geldt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

1. Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen zo ver mogelijk. Soms moet je een merkwaardig product herkennen om verder te vereenvoudigen

(a)  $\frac{a-b}{b-a}$

(b)  $\frac{xy}{x^2 - xy}$

(c)  $\frac{a-b}{(b-a)^2}$

(d)  $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2}$

(e)  $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$

(f)  $\frac{a^6 - 1}{1 - a^4}$

(g)  $\frac{100 - 4x^2}{25 + 5x}$

2. Werk de volgende bewerkingen uit:

(a)  $\frac{1}{x+y} + \frac{2y}{x^2 - y^2}$

(b)  $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-3}$

(c)  $\frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{a^2-1}$

(d)  $\frac{3ax}{2x-a} \cdot \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{x}\right)$

(e)  $\frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1\right)$

(f)  $2a - \frac{2a}{1 - \frac{3a}{1+3a}}$

3. Voer de volgende bewerkingen uit:

(a) Deel  $a+b$  door  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

(b) Deel  $\frac{a^2x^2 - x^4}{a^3 - x^3}$  door  $\frac{ax^2 + x^3}{a^2 + ax + x^2}$  (Hint: Gebruik een merkwaardig product van graad 3).

4. Bereken de volgende bewerkingen met behulp van merkwaardige producten:

(a)  $(2x-4)^3$

(b)  $(1+x+x^2)^2$

## Machten en wortels

### Eigenschap 1.4

#### Machten

Voor getallen  $a, b \in \mathbb{R}$  en  $n, m \in \mathbb{N}$  geldt:

- |                                                   |                                                                      |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| (a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$                     | (d) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$                                  |
| (b) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ , voor $a \neq 0$ | (e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ , voor $b \neq 0$ |
| (c) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$                     | (f) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , voor $a \neq 0$ en $n \neq 0$         |

### !! Let op !!

#### Machten

Merk op dat in veel gevallen:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

want dit is een veelgemaakte fout. Dit hebben we al aangehaald in **Merkwaardige producten** voor  $n = 2$ . Zo zien we bijvoorbeeld

$$(1 + 2)^3 = 3^3 = 27 \neq 9 = 1 + 8 = 1^3 + 2^3$$

De juiste uitdrukking vind je terug in **Het binomium van Newton**.

### Eigenschap 1.5

#### Wortels

Voor positieve reële getallen  $a, b \in \mathbb{R}^+$  en strikt positieve gehele getallen  $m, n \in \mathbb{N}_0$  geldt:

- |                                                                                   |                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (a) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$                         | (c) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$               |
| (b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ , voor $b \neq 0$ . | (d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ . |

### !! Let op !!

#### Wortels

Net zoals bij machten geldt in het algemeen

$$\sqrt[n]{a + b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Dit is een veelgemaakte fout. Inderdaad voor  $a = 9$ ,  $b = 16$  en  $n = 2$  zien we

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ en } \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

5. Bereken of vereenvoudig de volgende uitdrukkingen zo ver mogelijk:

(a)  $(-8)^{-\frac{2}{3}}$

(d)  $\frac{a^{-7} (a^2 b^3 c^4)^2}{(abc^{10})^3 (b^3 c^{19})^{-2}}$

(b)  $\frac{-(-2)^4}{(-2 \cdot 3^2)^{-1}}$

(e)  $\frac{\sqrt[4]{4a^4}}{\sqrt[3]{2a}}$

(c)  $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$  voor  $a \geq 0$ .

(f)  $-\sqrt{(-25a)^2 b^4}$  voor  $a \geq 0$  en  $b \leq 0$ .

### Veeltermvergelijkingen

Reële veeltermen in één onbekende zijn uitdrukkingen van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

waarbij  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  reële getallen zijn, die we de **coëfficiënten** van de veelterm noemen. De uitdrukkingen  $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n$  noemen we de **termen** van de veelterm, waarbij  $a_0$  ook wel de **constante term** wordt genoemd. De **graad** van de veelterm is de hoogste macht van  $x$  die voorkomt in de veelterm. Zo is de bovenstaande uitdrukking een  $n$ -degraadsveelterm.

### Veeltermvergelijkingen: Eerstegraads/Lineaire vergelijkingen

We zoeken oplossingen van vergelijkingen van de vorm:  $ax + b = 0$ , met  $a \neq 0$  en  $a, b$  reële getallen. We vinden dat

$$ax + b = 0 \xrightarrow{\text{linker- en rechterlid } -b} ax + b - b = 0 - b \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

#### Eigenschap 1.6

#### Lineaire vergelijkingen

Een vergelijking van de eerste graad ( $ax+b=0$ ) heeft steeds 1 oplossing, namelijk  $x = -\frac{b}{a}$  (nulpunt voor de vergelijking  $ax + b = 0$ ).

6. Los de volgende vergelijkingen op:

(a)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x - 17$

(b)  $\frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{3}$

## Veeltermvergelijkingen: Tweedegraadsvergelijkingen

### Eigenschap 1.7

### Tweedegraadsvergelijkingen

We gaan nu op zoek naar oplossingen van de vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

met  $a \neq 0$ . Deze vergelijking kan geen, één of twee verschillende (reële) oplossingen hebben. We berekenen de **discriminant**  $D$ :  $D = b^2 - 4ac$  en onderscheiden 3 gevallen:

- $D > 0 \Rightarrow 2$  oplossingen:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ .
- $D = 0 \Rightarrow 1$  oplossing:  $x = \frac{-b}{2a}$
- $D < 0 \Rightarrow$  geen (reële) oplossingen, aangezien  $\sqrt{D}$  niet bestaat.

1. Los de volgende vergelijkingen op:

(a)  $(x - 3)^2 + (x - 1)^2 = 2$

(d)  $(x + 1)^2 = 1$

(b)  $4x^2 - 12ax + 9(a^2 - b^2) = 0$

(e)  $(x + 4)^3 = -8$

(c)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

(f)  $2x^3 - 4x^2 + x - 2 = 0$

## Veeltermvergelijkingen: Horner

Bij het delen van een veelterm door een veelterm van de vorm  $x - a$  (met  $a \in \mathbb{R}_0$ ) kunnen we een eenvoudigere methode gebruiken, namelijk **de regel van Horner**.

Voorbeeld 3.1: Hier gebruiken we een voorbeeld om de methode uit te leggen.

$$\frac{p(x)}{d(x)} = \frac{6x^3 + 5x^2 - 12x + 4}{x + 1} = ?$$

In dit voorbeeld is  $a$  dus gelijk aan  $-1$ , aangezien  $x - a = x - (-1) = x + 1$ . We stellen onderstaand schema op, waarbij we bovenaan de coëfficiënten van de veelterm schrijven (in het blauw), gerangschikt van hoogste graad naar laagste graad. Links daaronder noteren we  $a$  (in het rood) voor de verticale streep.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -12 & 4 \\ -1 & & & & \end{array}$$

De eerste coëfficiënt schrijven we over in de rij onder de horizontale streep.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -12 & 4 \\ -1 & 6 & & & \end{array}$$

Daarna vermenigvuldigen we dit getal (hier 6) met  $a = -1$  en we schrijven dit product onder de volgende coëfficiënt.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -12 & 4 \\ -1 & & (-1) \cdot 6 = -6 & & \\ \hline & 6 & & & \end{array}$$

Vervolgens tellen we dit getal op met de coëfficiënt erboven (hier 5). Deze som noteren we in de laatste rij onder de horizontale streep.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -12 & 4 \\ -1 & & -6 & & \\ \hline & 6 & 5 - 6 = -1 & & \end{array}$$

Nu hebben we een getal onder de streep en we herhalen de twee vorige stappen. Eerst vermenigvuldigen we dit getal met  $a = -1$  en we schrijven dit product onder de volgende coëfficiënt.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -12 & 4 \\ -1 & & -6 & 1 & \\ \hline & 6 & -1 & & \end{array}$$

Daarna tellen we dit nieuwe getal op met de coëfficiënt erboven.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -12 & 4 \\ -1 & & -6 & 1 & \\ \hline & 6 & -1 & -11 & \end{array}$$

Tenslotte herhalen we deze twee stappen voor de laatste coëfficiënt.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -12 & 4 \\ -1 & & -6 & 1 & 11 \\ \hline & 6 & -1 & -11 & 15 \end{array}$$

Het laatste getal (in het rood) onder de horizontale streep is de rest van deze deling, dus

$$r(x) = 15.$$

Om de rest te onderscheiden van het quotiënt wordt er voor dit getal nog een verticale streep geplaatst. De getallen voor deze verticale streep zijn dus de coëfficiënten van het quotiënt  $q(x)$  (de blauwe getallen). Het getal  $-11$  hoort bij de constante term,  $-1$  bij de eerstegraadsterm en  $6$  bij de tweedegraadsterm:

$$q(x) = 6x^2 - x - 11.$$

Dit betekent dat

$$6x^3 + 5x^2 - 12x + 4 = (x + 1) \cdot (6x^2 - x - 11) + 15.$$

**!! Let op !!****Horner**

Als er een graad ontbreekt in de veelterm  $p(x)$ , moeten we ook bij Horner deze term steeds bijschrijven met coëfficiënt 0, bijvoorbeeld

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1.$$

Bij deling door  $x - 1$  ziet het schema van Horner er dan als volgt uit:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & b-2 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

2. Bepaal de rest en quotiënt met de regel van Horner bij de volgende delingen:

- (a) deel  $4x^3 - 8 + 3x^4 - 5x$  door  $x + 2$
- (b) deel  $x^3 - 7x + 6$  door  $x - 1$
- (c) deel  $3a^5 - 7a^3 + 9a^2 - 10a + 20$  door  $a + 2$

**Eigenschap 1.8****Deelbaarheid**

Een veelterm is deelbaar door een deler wanneer de rest nul is. Voor een deling van  $p(x)$  door  $x - a$  voor een getal  $a$  kunnen we eenvoudig nagaan of de rest nul is, want de rest wordt gegeven door  $p(a)$ . We zeggen dan dat de deling opgaat.

3. Bepaal  $p$  zodat het volgende geldt:

- (a)  $px^3 - 2x^2 - 7px - 10$  is deelbaar door  $x - 2$ ,
- (b)  $2x^3 + (p - 1)x^2 - px + 1$  is deelbaar door  $x + 1$ .

4. Ontbind in factoren:

- (a)  $x^3 - 4x^2$
- (b)  $2a(-x - y) - 7(x + y)$
- (c)  $x^4 - x^3 - x - 1$
- (d)  $x^2 - (y + 2)^2$
- (e)  $x^8 + 8x^4 + 16$
- (f)  $x^3 - 49x - 120$

(Hint: Voer bij (e) een nieuwe variabele in, bij (f) vul eens de waarde  $-3$  in.)

**Niet-veelterm vergelijkingen: rationale en irrationale vergelijkingen**

1. Los de volgende vergelijkingen op:

- (a)  $x + \frac{1}{x-3} = 5$
- (b)  $\frac{x}{x^2 + x - 2} = \frac{2}{x-1}$
- (c)  $\sqrt{x-4} + 3 - \sqrt{x+11} = 0$

### Rekenen met letters

1. Voer de volgende bewerkingen uit:

$$(a) \text{ deel } a + \frac{ab}{a-b} \text{ door } b + \frac{b^2}{a-b}, \quad (b) \text{ deel } \frac{1}{\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1} \text{ door } \frac{1}{\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1}.$$

2. Bereken met merkwaardige producten:

$$(x+3)^2 - 3(x+2)^3 + 3(x+1)^3 - x^3.$$

### Machten en wortels

1. Bereken of vereenvoudig de volgende uitdrukkingen zo ver mogelijk:

$$\begin{array}{ll} (a) \sqrt[3]{-96} & (d) \sqrt[4]{\frac{32a^4b^5}{81c^6d^8}} \text{ voor } b \geq 0. \\ (b) \left(ab^3c^{-\frac{7}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} \left(ab^{\frac{7}{2}}\right)^{-1} & (e) \sqrt[5]{-256a^{-35}c^{15}} \\ (c) \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}} & (f) \sqrt[n]{2^na^{n+1}b^{n+2}} \text{ voor } a \geq 0 \text{ en } b \geq 0. \\ & (g) \sqrt[3]{\sqrt[n]{a^{6n+1}b}} \text{ voor } a \geq 0 \text{ en } b \geq 0. \end{array}$$

### Veeltermvergelijkingen

1. Los de volgende vergelijkingen op:

$$\begin{array}{ll} (a) \frac{x}{6} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{5} - \frac{x}{3} \right) & (b) \frac{x}{2} - 4 + \frac{x}{3} = 7 + \frac{5x}{6} \\ (c) (x^2 + x + 1)^2 = 4(x^2 + x + 1) + 5 \end{array}$$

2. Bepaal de rest en quotiënt met de regel van Horner bij de volgende delingen:

$$\begin{array}{ll} (a) \text{ deel } x^7 - 9x^3y^4 + 2xy^6 - 4y^7 \text{ door } x - 3y \\ (b) \text{ deel } 2x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 8x + 6 \text{ door } 2x - 1 \end{array}$$

3. Bepaal  $a$  en  $b$  zodat:

$$\begin{array}{ll} (a) ax^3 + 2bx^2 - 4x - a \text{ is deelbaar door } (x+1)(x-1). \\ (b) 5x^3 + ax^2 - bx + 2 \text{ is deelbaar door } (x-1)(x+2). \end{array}$$

Hint: Om deelbaar te zijn door  $(x-c)(x-d)$  met  $c \neq d$  moet de veelterm deelbaar zijn door  $x-c$  en  $x-d$ .

4. Ontbind in factoren:

(a)  $64a^3 - 125b^3$

(b)  $250a^3 + 300a^2b^2 + 120ab^4 + 16b^6$

(c)  $2ax - a^2x^2 - 1 + 9a^2$

(d)  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

(e)  $4x^2 - 3x - 1$

(f)  $-x^2 + 5x + 14$

### Niet-veelterm vergelijkingen

1. Los de volgende vergelijkingen op:

(a)  $\frac{x-a}{2a} = \frac{2a}{x-a}$

(b)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + \frac{1}{a^2}$

(c)  $2\sqrt{x} = \sqrt{x-37} + \sqrt{x+39}$

## Dag 2

### *Zelfstudie-opdrachten*

---

#### Stelsels van lineaire vergelijkingen

We zoeken oplossingen van

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ x + 7y = 10. \end{cases}$$

We lossen eerst de tweedegraadsvergelijking op naar  $x$  en vervangen  $x$  dan in de eerstegraadsvergelijking:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ x = 10 - 7y. \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ x = 10 - 7y. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3 \cdot (10 - 7y) - 4y = 5, \\ x = 10 - 7y. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -25y = -25, \\ x = 10 - 7y. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 1, \\ x = 10 - 7y. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 1, \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

We vulden in de laatste stap de waarde van  $y$  in de laatste vergelijking in. De oplossing is dus  $(x, y) = (3, 1)$ .

1. Los de volgende stelsels op:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{cases} 12x - 7y = -2, \\ 8x + 21y = 50. \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ x_2 = 2x_3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 14 \end{cases} \end{array}$$

## Veeltermongelijkheden

### Rekenregel 2.1

### Factoren overbrengen

Stel dat  $P(x) < Q(x)$  en we vermenigvuldigen beide leden met een willekeurig getal  $c \neq 0$ . Dan vinden we

- (a) Geval  $c > 0 \Rightarrow$  De ongelijkheid blijft behouden:  $cP(x) < cQ(x)$ .
- (b) Geval  $c < 0 \Rightarrow$  De ongelijkheid keert om:  $cP(x) > cQ(x)$ .

1. Los de volgende ongelijkheden op :

(a)  $\frac{x-3}{4} + \frac{2x-5}{5} < 1 - 3x$

(c)  $(x-3)(2x+4) \leq (x-3)(-3x+9)$

(d)  $-2(x-2)(x+2)(-x+3) \leq 0$

(b)  $(5x-2)(7x-14) > 0$

(e)  $(x^2+5x+6)(2x-1) < 0$

## Niet-veeltermongelijkheden

1. Los de volgende ongelijkheden op:

(a)  $\frac{-x^2+3x+4}{-x+4} > 0$

(b)  $\frac{1}{x} + \frac{x}{x+1} > 0$

## Absolute waarde

### Definitie 2.2

### Absloute Waarde

De **absolute waarde**  $|x|$  van een getal  $x \in \mathbb{R}$  wordt gegeven door

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0, \\ -x & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

### Eigenschappen 2.3

### Absolute Waarde

Voor alle reële getallen  $x \in \mathbb{R}$  geldt:

1.  $|x| \geq 0$

4.  $|x| = |-x|$

2.  $|x| = 0 \iff x = 0$

3.  $|x| \geq x$  en  $|x| \geq -x$

5.  $\sqrt{x^2} = |x|$

1. Los de volgende vergelijking op:  $|-3x+5| = 2$ .

2. Bepaal welke getallen  $x$  voldoen aan

- (a)  $|x + 2| < 5$  (c)  $(x - 2)^2 < 9$   
 (b)  $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{5}{2}$  (d)  $\frac{1}{2} < (3 - 4x)^2$

Hint: voor  $a \geq 0$  geldt steeds

$$x^2 \leq a \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{a},$$

dus  $x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 3$  en

$$x^2 > a \Leftrightarrow |x| > \sqrt{a},$$

dus  $x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$  of  $x > 2$ .

## Sommatietekenen

We starten met een voorbeeld om duidelijk te maken hoe het sommatietekenen werkt.

### Definitie 2.5

De som  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  noteren we als

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

met index  $i$  in de indexverzameling  $\{1, \dots, n\}$  en algemene term  $a_i$

### Sommatietekenen

### Voorbeeld 2.4

We willen de som:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

op een verkorte manier noteren. We zien dat elke term in deze som het kwadraat van respectievelijk 1, 2, 3, 4, 5 is. We kunnen dit dus schrijven als  $i^2$  waar we eerst  $i$  vervangen door 1, dan door 2, 3, 4 en tenslotte door 5. Dit noteren we als

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

We zeggen: “de som van alle  $i^2$  met  $i$  gaande van 1 tot en met 5”. In de formule van een sommatie komen altijd één of meerdere letters voor. In het voorbeeld was dit de letter  $i$ . Dit noemen we de index. Typische letters die hiervoor gebruikt kunnen worden zijn  $i, j, k, l, m, n$ . De keuze van letter maakt niet zoveel uit, zo is

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{j=1}^5 j^2$$

1. Gegeven de volgende getalwaarden:

|       |   |   |    |   |   |   |   |   |    |    |
|-------|---|---|----|---|---|---|---|---|----|----|
| $i$   | 1 | 2 | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 |
| $x_i$ | 1 | 0 | -2 | 5 | 9 | 2 | 6 | 6 | -3 | 4  |

(dus  $x_6 = 2$ ). Bereken de getalwaarde van de volgende sommen:

|                           |                          |                               |
|---------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| (a) $\sum_{i=1}^{10} x_i$ | (c) $\sum_{j=3}^3 x_j$   | (e) $\sum_{i=3}^8 (2x_i + 1)$ |
| (b) $\sum_{k=5}^7 x_i$    | (d) $\sum_{i=1}^4 x_i^2$ | (f) $\sum_{i=2}^4 x_{i+1}$    |

2. Bereken de getalwaarde van de volgende sommen:

|                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| (a) $\sum_{n=0}^2 3^{2n-1}$ | (b) $\sum_{n=1}^4 (n^2 - 1)$ |
|-----------------------------|------------------------------|

3. Schrijf voluit

|                            |                      |                              |                            |
|----------------------------|----------------------|------------------------------|----------------------------|
| (a) $\sum_{k=1}^3 a_k x_k$ | (b) $\sum_{j=1}^n b$ | (c) $\sum_{i=1}^3 (y_i - a)$ | (d) $\sum_{i=1}^3 y_i - a$ |
|----------------------------|----------------------|------------------------------|----------------------------|

## Binomiaalcoëfficiënt en faculteit

Een faculteit geeft ons het product van een natuurlijk getal met alle kleinere natuurlijke getallen, behalve nul. Dit kunnen we definiëren als volgt

### Definitie 2.6

Voor een willekeurig natuurlijk getal  $n \in \mathbb{N}$  noemen we het product van de eerste  $n$  van nul verschillende natuurlijke getallen de faculteit van  $n$ , namelijk

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n,$$

(lees: “ $n$ ” faculteit). In het bijzonder stellen we  $0! = 1$ .

### Faculteit

### Eigenschappen 2.7

Voor elk natuurlijk getal  $n \geq 1$  geldt

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

### Faculteit

**Definitie 2.8****Binomiaalcoëfficiënt**

Voor natuurlijke getallen  $p$  en  $n$  met  $p \leq n$  wordt de binomiaalcoëfficiënt  $\binom{n}{p}$  gegeven door

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Definitie 2.9****Binomiaalcoëfficiënt**

Voor natuurlijke getallen  $n$  en  $p$  met  $p \leq n$  geldt:

1.  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2.  $\binom{n}{1} = n$
3.  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

1. Bereken of vereenvoudig de volgende uitdrukkingen (dit zou zonder rekenmachine mogelijk moeten zijn)

(a)  $5! - 4!$

(b)  $\frac{10!}{6!}$

(c)  $\frac{1! 2! 3! 4!}{8!}$

(d)  $\binom{7}{3}$

(e)  $\binom{12}{0}$

(f)  $\binom{n}{n-1}$

(g)  $\sum_{n=0}^3 n!$

(h)  $\sum_{p=0}^3 \binom{3}{p} 2^{3-p} 3^p$

(i)  $6! - 5! + \frac{4! \cdot 5!}{6!}$

(j)  $\frac{20! \cdot 13!}{18! \cdot 15!}$

(k)  $\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

(l)  $\frac{(n!)^2}{n^2}$

(m)  $\frac{2n!}{(2n)!}$

**Logaritmen****Definitie 2.10****Logaritme**

Voor  $a \in \mathbb{R}_0^+$  met  $a \neq 1$  wordt de  $a$ -**logaritme**  $\log_a(x)$  van een reëel getal  $x$  gegeven door

$$y = \log_a(x), \text{ als en slechts als } a^y = x.$$

Het getal  $a$  noemen we het **grondtal** van de logaritme.

Als een macht  $y = a^x$  gegeven is, met  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  en  $x > 0$ , kun je zowel het grondtal als de exponent terugvinden wanneer de andere gegeven is:

- Het grondtal  $a$  vinden we met de omgekeerde exponent, namelijk  $a = y^{\frac{1}{x}}$ ,
- De exponent  $x$  vinden we met de logaritme, namelijk  $x = \log_a(y)$ .

Er zijn enkele grondtallen die vaak voorkomen dat we hen een andere notatie geven.

#### Notatie 2.11

#### Logaritme

De tiendelige logaritme (logaritme met grondtal 10) noteren we zonder grondtal, dus

$$y = \log(x), \text{ als en slechts als } 10^y = x.$$

De natuurlijke logaritme (logaritme met als grondtal het getal van Euler  $e = 2,71828$ ) noteren we met  $\ln$ , dus

$$y = \ln(x), \text{ als en slechts als } e^y = x.$$

#### Eigenschappen 2.12

#### Logaritme

Voor elk strikt positief reëel getal  $a \in R_0^+$  met  $a \neq 1$  en elk reëel getal  $x$  en positief reëel getal  $y$  geldt:

- |                       |                         |
|-----------------------|-------------------------|
| (a) $\log_a(a^x) = x$ | (d) $a^{\log_a(y)} = y$ |
| (b) $\log(10^x) = x$  | (e) $10^{\log(y)} = y$  |
| (c) $\ln(e^x) = x$    | (f) $a^{\ln(y)} = y$    |

#### Eigenschappen 2.13

#### Logaritme

Neem een willekeurig grondtal  $a \in R_0^+$  verschillend van 1. Dan geldt voor alle strikt positieve reële getallen  $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ :

1.  $\log_a(a) = 1$  en  $\log_a(1) = 0$
2.  $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
3.  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
4. Voor  $q \in R$  geldt:  $\log_a(x^q) = q \cdot \log_a(x)$

1. Herleid telkens tot één logaritme

- (a)  $\ln(x) - \ln(y) + \ln(z)$   
 (b)  $\ln(x) - 2$

(c)  $\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{3}{2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x+1)$

2. Bereken of vereenvoudig de volgende uitdrukkingen zo ver mogelijk:

- |                                      |                                                                         |
|--------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\log_2(32)$                     | (f) $-3 \log\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{\log(10^3)}{\log_2(10)}$ |
| (b) $\log_\pi(\pi)$                  | (g) $e^{\ln(5)}$                                                        |
| (c) $\log_9\left(\frac{1}{3}\right)$ | (h) $e^{\ln(x)} - \ln(e^x)$                                             |
| (d) $\log(\sqrt[3]{100})$            | (i) $\ln(x^4 e^{-x})$                                                   |
| (e) $\log_4(8\sqrt{2})$              | (j) $e^{\ln((x^2)-2\ln(y))}$                                            |

3. Zijn er beperkingen voor  $x$  in de vereenvoudigingen in vraag (e) en (f) van de vorige oefening?

4. Bepaal de waarde  $x$  waarvoor de volgende gelijkheden gelden:

- |                             |                                          |
|-----------------------------|------------------------------------------|
| (a) $\ln(x) = -\frac{1}{2}$ | (c) $\log_x(\sqrt{2}) = 2$               |
| (b) $\log_5(x) = -1$        | (d) $\log_x\left(\frac{1}{3}\right) = 2$ |

---

*Extra / Uitdagende opdrachten*

### Stelsels van lineaire vergelijkingen

1. Los de volgende stelsels op:

- |                                                                        |                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5b - a, \\ 3x - 2y = a + 5b. \end{cases}$ | (b) $\begin{cases} 5x + 3y - 2z = 3, \\ 9y = 8z, \\ 3y + 4z = 5. \end{cases}$ |
|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|

### Veeltermongelijkheden

1. Los de volgende ongelijkheden op :

- |                                          |                                       |
|------------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $x^2 + 13 \leq 7x + 1$               | (c) $(x^3 - 3x^2 - x + 3)(x - 3) > 0$ |
| (b) $(-x^2 + 2x + 5)(3x^2 + 2x + 5) < 0$ |                                       |

### Niet-veeltermongelijkheden

1. Los de volgende ongelijkheid op:  $\frac{3-x^2}{1+x} < 2$ .

## Absolute waarde

1. Los op:

$$(a) |x - 4| < 1 \quad (b) (3x - 2)^2 \leq 1 \quad (c) |3 - x| > 2 \quad (d) \left| \frac{x + 1}{2} \right| < 1$$

2. Schets de grafiek van de functie  $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ .

## Sommatieteken

1. Schrijf voluit:

$$(a) \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n} \quad (b) \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^{n+1} 5^{n-1}}{2}$$

## Binomiaalcoëfficiënt en faculteit

1. Bereken of vereenvoudig de volgende uitdrukkingen (dit zou zonder rekenmachine mogelijk moeten zijn)

$$\begin{array}{ll} (a) 6! - 5! + \frac{4! \cdot 5!}{6!} & (f) \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \\ (b) \frac{20! \cdot 13!}{18! \cdot 15!} & (g) \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \\ (c) \binom{7}{3} - \binom{6}{2} & (h) \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \\ (d) \frac{n!}{(n+1)!} & (i) \frac{(3n-1)!}{(3n)!} \\ (e) \frac{(2n+1)!}{(2n)!} & \end{array}$$

## Logaritmen

1. Herleid tot één logaritme:  $3 + 2 \ln(x)$ .

2. Bereken (zonder rekenmachine) of vereenvoudig zo ver mogelijk:

$$\begin{array}{ll} (a) \log_2 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) & (e) \log_2 \left( \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \right) \\ (b) \log_4(2) & (f) \log_5(5) \\ (c) \log_4(8) & (g) \log_{\frac{1}{2}}(64) \\ (d) \log_4(\sqrt[3]{4}) & (h) \log(0,1) \end{array}$$

(i)  $\log_7 \left( \frac{\sqrt{7}}{7} \right)$

(j)  $\log_{\sqrt{3}}(81)$

(k)  $\log_{0,5}(0,25)$

(l)  $\log_{\sqrt{7}}(7)$

(m)  $\ln \left( \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$

(n)  $\ln(e^{10})$

(o)  $e^{-\ln(x)}$

(p)  $\ln(\sqrt{e})$

(q)  $e^{\ln(x^2)}$

(r)  $e^{3\ln(2)}$

3. Geldt er dat  $\ln(x) - 2 = \ln\left(\frac{x}{e^2}\right)$ ?

## Dag 3

### Zelfstudie-opdrachten

---

#### Basisbegrippen functies

##### Definitie 3.1

##### Domein

Het domein van een reële functie  $f$ , genoteerd  $\text{dom}(f)$ , is de verzameling van alle reële getallen waarvoor er een functiewaarde bestaat, dus

$$\text{dom}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \text{ waarvoor er een getal } y \in \mathbb{R} \text{ is zodat } y = f(x) \}$$

1. Bepaal het domein van de volgende functies:

(a)  $y = \sqrt{(x-2)(1+x)}$

(b)  $y = \frac{-3}{-3x^3 - 4x^2 + x + 2}$

2. Stel  $f(x) = x - 1$  en  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Bereken de samengestelde functies  $f(g(x))$  en  $g(f(x))$ . Bereken in het bijzonder  $f(g(2))$  en  $g(f(2))$ .

#### Inverse functies

##### Definitie 3.2

##### Inverse functie

Een functie  $g(x)$  is een inverse van de functie  $f(x)$  als voor  $x = g(y)$  geldt dat  $f(x) = y$ . De inverse functie  $g$  wordt vaak genoteerd als  $f^{-1}$ .

##### Oplossingsstrategie 3.3

##### Inverse functie

1. Schrijf  $y = f(x)$ .
  2. Los de vergelijking op naar  $x$  waarbij  $y$  gezien wordt als parameter (soms geldt er een beperking op de waarden die  $y$  mag aannemen). Dit geeft een vergelijking  $x = g(y)$ .
  3. De inverse functie  $f^{-1}(x)$  wordt gegeven door  $f^{-1}(x) = g(x)$ .
  4. We vervangen in  $g(y)$  elke  $y$  dus door  $x$ .
1. Beschouw de functie  $f(x) = \frac{2x+3}{-x+8}$ . Bepaal het domein van  $f(x)$ . Bepaal daarna de inverse van  $f^{-1}(x)$  en bepaal het domein van  $f^{-1}$ . Wat kan je zeggen over het beeld van  $f$ ?
  2. Bepaal de inverse functie van  $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$ .

## Veeltermfuncties

Een rechte is van de vorm:

$$ax + by = c,$$

waarbij  $a$  en  $b$  niet tegelijk nul mogen zijn. Indien  $a = 0$  spreken we van een **horizontale rechte**. Als  $b = 0$ , spreken we van een **verticale rechte**. Niet-verticale rechten hebben steeds de eigenschap dat de gemiddelde verandering van  $y$  als een functie van  $x$  tussen twee punten  $(x_1, y_1)$  en  $(x_2, y_2)$  gegeven door

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

steeds constant is. We definiëren dit als de richtingscoëfficiënt (rico) van de rechte.

### Definitie 3.3

rico

Zij  $(x_1, y_1)$  en  $(x_2, y_2)$  twee punten van een rechte  $R$  met  $x_1 \neq x_2$ . Dan definiëren we de rico of richtingscoëfficiënt van de rechte als

$$\text{rico} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dit komt overeen met hoe dit gedefinieerd is bij **eerstegraadsfuncties**.

1. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechte  $-2y + x = 1 + x + y$ .
2. Bepaal de rechte die voldoet aan de voorwaarde:

- |                                                               |                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) rico $-3$ , bevat $(-2, 1)$                               | (e) bevat $(-3, 8)$ en $(-7, 8)$                                                               |
| (b) rico $0$ , bevat $(3, 4)$                                 | (f) bevat $(2, 3)$ en $(2, 9)$                                                                 |
| (c) rico $\frac{5}{2}$ , bevat $\left(6, -\frac{1}{2}\right)$ | (g) bevat $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ en $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}\right)$ |
| (d) bevat $(-1, 3)$ en $(-2, 6)$                              |                                                                                                |

3. Bepaal de snijpunten met de coördinaatassen van de volgende functies:

- |                   |                          |                                   |
|-------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| (a) $y = -3x + 1$ | (c) $y = 1$              | (e) $y = -x^2 - 1$                |
| (b) $y = 3x$      | (d) $y = -3x^2 + 2x + 1$ | (f) $y = 2x^2 - 6x + \frac{9}{2}$ |

4. Zoek de snijpunten van de volgende rechten

(a)  $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$

(b)  $\begin{cases} y = -x \\ y = 2 \end{cases}$

(c)  $\begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = -2(x + 1) \end{cases}$

5. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechte  $2x - y = 5$  en  $6x = 12y - 7$  en bepaal hun onderlinge ligging.

6. Bepaal de vergelijking van de rechte door  $(3, 2)$  en evenwijdig met  $2y + x + 3 = 0$ .

7. Maak een tekentabel voor de volgende functies

(a)  $f(x) = -5x + 7$

(c)  $h(t) = t^2 + 3t + 6$

(b)  $g(x) = 1 - 3x + x^2$

(d)  $f(q) = 9q^2 + 6q + 1$

8. De functie  $y = -x^2 + px - 5$  heeft een maximum voor  $x = 1$ . Bepaal  $p$  en de maximale functiewaarde.

## Limieten

### Eigenschappen 3.4

### Oneindig

Stel dat  $x \in \mathbb{R}$  een willekeurig reëel getal is. Dan geldt:

1. Optellen:

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \text{ en } x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) \text{ en } (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

2. Vermenigvuldigen:

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \text{ en } (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

–  $x > 0$  :

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty, \text{ en } x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$$

–  $x < 0$  :

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty, \text{ en } x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$$

3. Speciale gevallen voor  $x \neq 0$ :

$$\frac{x}{\infty} = 0, \text{ en } \frac{x}{0} \rightarrow \infty.$$

**Eigenschappen 3.5****Onbepaaldheid**

De volgende bewerkingen zijn onbepaald:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, +\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0.$$

Hierbij betekent  $\infty$  ofwel  $+\infty$  of  $-\infty$ .

1. Bereken de volgende limieten (als ze bestaan). Maak indien nodig een onderscheid tussen linker- en rechterlimiet:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - x - 4}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 2x + 5}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x-1)(x-2)(x-3)^2$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{x^2 - 7x + 12}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{2x^2 - 4x + 6}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6(x-2) - x^5(x-3)$

**Asymptoten****Definitie 3.6****Asymptoten**

1. De rechte  $y = a$  (met  $a \in \mathbb{R}$ ) is een **Horizontale asymptoot** (H.A.) van  $f$  als

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a.$$

2. De rechte  $x = a$  (met  $a \in \mathbb{R}$ ) is een **verticale asymptoot** (V.A.) van  $f$  als

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ en / of } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty.$$

3. De rechte met vergelijking  $y = ax + b$  (met  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) is een **schuine asymptoot** (S.A.) van  $f$  voor  $x \rightarrow +\infty$  (respectievelijk voor  $x \rightarrow -\infty$ ) als

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

met

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}_0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}.$$

1. Bepaal de asymptoten (indien ze aanwezig zijn) van de volgende functies:

$$(a) \quad y = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$$

$$(c) \quad y = \frac{x - 1}{x^2 + 3x}$$

$$(b) \quad y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$$

$$(d) \quad y = \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$$

---

*Extra / Uitdagende opdrachten*

### Veeltermfuncties

1. Bepaal de rechte die voldoet aan de voorwaarde:

$$(a) \quad \text{rico } 2, \text{ bevat } (0, 6)$$

$$(d) \quad \text{bevat } (5, 6) \text{ en } (3, 0)$$

$$(b) \quad \text{rico } 1, \text{ bevat } (0, 0)$$

$$(e) \quad \text{bevat } (0, 6) \text{ en } (4, 0)$$

$$(c) \quad \text{rico } -2, \text{ bevat } (-4, -5)$$

2. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de volgende rechten:

$$(a) \quad 7x = 3$$

$$(b) \quad -2y + 3 = 3y + 8$$

3. Bepaal de snijpunten met de coördinaatassen van de volgende functies:

$$(a) \quad y = x^2 + 3x - 1$$

$$(b) \quad y = x^2 + 4x$$

$$(c) \quad y = 4x^2$$

4. Maak een tekentabel van de volgende functies:

$$(a) \quad f(x) = mx + n \text{ met } m, n \in \mathbb{R}_0$$

$$(b) \quad g(t) = 1 - 2t^2$$

### Limieten

1. Bereken de volgende limieten (als ze bestaan). Maak indien nodig een onderscheid tussen linker- en rechterlimiet:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{4+x}}$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x\sqrt{x-3}}{(x-10)^2}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+3}$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1-8x^3}}{x}$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+3}$$

$$(g) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \tan(x)}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - x}{\sqrt[4]{x^4-4x^2}}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+2x}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2(x)}{x \sin(2x)}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}-1}$$

## Asymptoten

1. Bepaal de asymptoten van de volgende functies:

$$(a) y = \frac{x^3+1}{x^2}$$

$$(b) y = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$$

$$(c) y = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x+3}$$

$$(d) y = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$$

$$(e) y = \frac{x^2-1}{x}.$$

2. Bepaal de asymptoten van de functie  $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$ .

3. (Enkel als je de regel van l'Hôpital kent) Bepaal de asymptoten van de volgende functies:

$$(a) y = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$(b) y = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(c) y = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})(x-1)}{x-3}$$

## Dag 4

### Zelfstudie-opdrachten

---

#### Definitie 4.1

#### Rationale functies

Een rationale functie is een reële functie waarbij  $f(x)$  bepaald wordt door het quotiënt van twee veeltermen.

We bekijken de basiseigenschappen van rationale functies:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

met  $p(x)$  en  $q(x)$  veeltermfuncties.

Het domein van de rationale functies  $f(x)$  wordt gegeven door alle reële getallen, behalve wanneer de noemer  $q(x)$  nul wordt. We kunnen immers niet delen door nul. Om het domein te bepalen moeten we in dat geval de nulpunten van  $q(x)$  berekenen.

#### Voorbeeld 4.2

#### Rationale functies

De functie  $f(x) = \frac{x^2-4}{5x^2+5x}$  bestaat voor alle reële getallen, behalve wanneer

$$5x^2 + 5x = 0$$

namelijk de nulpunten van de noemer. Deze nulpunten zijn  $x = -1$  en  $x = 0$ . Het domein bestaat dus uit alle reële getallen behalve  $-1$  en  $0$ :

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[.$$

### Rationale functies

1. Schets de grafieken van  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $g(x) = x$  in één assenstelsel. Bepaal de snijpunten van deze functies (indien ze bestaan).
2. Bepaal het domein en de asymptoten van de functie  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  (indien ze bestaan). Is deze functie een homografische functie? Bepaal het snijpunt van de grafiek van  $f(x)$  met de grafiek van de functie  $g(x) = 3x - 1$ . Schets beide functies.

### Exponentiële en Logaritmische functies

Een belangrijk voorbeeld is de exponentiële functie met grondtal  $e$  (getal van Euler).

**Definitie 4.3**

De functie

$$f(x) = e^x,$$

waarbij  $e$  het getal van Euler is, noemen we de natuurlijke exponentiële functie. Het getal van Euler wordt ongeveer gegeven door  $e \approx 2,71828$ .

In het bijzonder is  $e > 1$  dus het functieverloop is strikt stijgend. Indien we van **de** exponentiële functie spreken, bedoelen we  $e^x$ .

**Natuurlijke exponentiële functie****Eigenschappen 4.4**

Voor de functie  $f(x) = e^x$  geldt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

**Natuurlijke exponentiële functie**

1. Schets de grafiek van  $f(x) = 3^{-x}$ . Is deze functie stijgend of dalend?
2. Gegeven is de functie

$$N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1000}{1 + 999e^{-t}}.$$

Bereken voor welke waarde  $t_0$  geldt dat  $N(t_0) = 500$ .

3. Veronderstel dat  $V(t) = 20 - 20e^{-kt}$  voor een  $k \in \mathbb{R}$ . Stel dat  $V(2) = 4$ . (Haal hieruit  $k$ ) Bereken dan  $V(10)$ . Gebruik geen afrondingen in tussenresultaten.
4. Gegeven  $y = ab^{cx}$  met  $0 < a < 1$ ,  $b > 1$ , en  $c < 0$ . Toon aan dat  $\ln(y)$  een eerstegraadsfunctie is in  $x$  en schets de grafiek van  $\ln(y)$ .
5. Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{1000}{1 + 999e^{-k \cdot 1000 \cdot x}}.$$

Er is gegeven dat het punt  $\left(\frac{1}{10}, 20\right)$  op de grafiek van deze functie ligt. Bereken  $k$ .

**Exponentiële en logaritmische vergelijkingen**

1. De volgende technieken kunnen van pas komen om logaritmische vergelijkingen op te lossen:
  - (a) Herleid machten en logaritmen zoveel mogelijk naar hetzelfde grondtal.

Bijvoorbeeld:

$$\frac{8^{2x}}{4^{5x}} = \frac{(2^3)^{2x}}{(2^2)^{5x}} = \frac{2^{3 \cdot 2x}}{2^{2 \cdot 5x}} = \frac{2^{6x}}{2^{10x}} = 2^{6x-10x} = 2^{-4x},$$

$$\frac{\log_2(x)}{\log_4(x)} = \frac{\log_2(x)}{\frac{\log_2(x)}{\log_2(4)}} = \frac{\log_2(x) \cdot \log_2(4)}{\log_2(x)} = \log_2(4) = 2.$$

(b) Neem een logaritme van het linker- en rechterlid, bijvoorbeeld

$$2^x = 7 \Leftrightarrow \log(2^x) = \log(7) \Leftrightarrow x \log(2) = \log(7) \Leftrightarrow x = \frac{\log(7)}{\log(2)}.$$

(c) Voer een nieuwe onbekende in, bijvoorbeeld om  $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$  op te lossen want

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2, \text{ en } 2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x,$$

zodat als we  $y = 2^x$  invoeren, we de volgende vergelijking moeten oplossen

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Uit de oplossing  $y = 1$ , halen we dan  $2^x = 1$  oftewel,  $x = 0$ .

(d) Pas onmiddellijk de definitie toe, bijvoorbeeld  $\log_3(x) = 2$  geeft  $x = 3^2$  want 2 is de exponent die je aan 3 moet toekennen om  $x$  te bekomen.

(e) Controleer steeds je oplossingen door ze in te vullen in de opgave.

2. Los de volgende vergelijkingen op:

- |                                     |                                                               |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| (a) $2^{x-1} = \frac{1}{2}$         | (e) $16^x - 7 \cdot 4^x = 8$                                  |
| (b) $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = 1$ | (f) $\log_2(x-1) = -1$                                        |
| (c) $\log_x(4) = \log_4(x)$         | (g) $\log_2(x) \cdot \log_x(6) = \log_2(x) + \log_2(7 - x^2)$ |
| (d) $\log_2(\log_x(81)) = 2$        | (h) $7^{1-2x} - 49 = 0$                                       |

---

*Extra / Uitdagende opdrachten*

### Exponentiële en Logaritmische functies

1. Stel dat  $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ . Bovendien is gegeven dat  $Q(5568) = \frac{Q_0}{2}$ . Bereken  $t_1$  zodat  $Q(t_1) = 0,1 \cdot Q_0$ .

### Exponentiële en logaritmische vergelijkingen

1. Los de volgende vergelijkingen op:

(a)  $27^{\frac{1}{x}} \cdot 243^{\frac{1}{x+2}} = 81^{\frac{1}{x-1}}$

(b)  $0,86^x = 0,0719$

(c)  $\left(\frac{11}{10}\right)^{x+2} - 1 = 0$

(d)  $5^{x+1} = 3$

(e)  $\log_5(x) = -1$

(f)  $5^{x+1} + 2 \cdot 5^{-x} = 7$

(g)  $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$